Physics Lib.

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON

H. GEIGER

111. BAND. 5. UND 6. HEFT

MIT 45 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 8. DEZEMBER 1938)

VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1938

Die

Zeitschrift für Physik

erscheint zwanglos in einzelnen Heften; 12 Hefte bilden einen Band.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstande der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Auch verpflichtet sich der Autor, die Arbeit nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen.

Manuskriptsendungen sind an die **Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24,** zu richten.

Die Autoren erhalten eine Fahnenkorrektur. Eine 2. (Umbruch-) Korrektur wird nur auf ausdrücklichen Wunsch übersandt, weil dadurch in der Regel das Erscheinen der Arbeit erheblich verzögert wird.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche **Textänderungen,** werden, soweit sie 10% der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei zur Verfügung.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24.

Aufnahmebedingungen.

Nur solche Arbeiten können in die Zeitschrift für Physik aufgenommen werden, die den folgenden

Richtlinien

genügen:

1. Die Arbeit muß dem Gebiete der experimentellen oder theoretischen Physik angehören. Auch Arbeiten aus Nachbargebieten können aufgenommen werden. Ausgeschlossen sind jedoch Arbeiten mit rein mathematischem, astronomischem, mineralogischem oder chemischem Inhalt.

2. Die Einleitung der Arbeit soll den Leser in knappen Sätzen in die Vorgeschichte des Problems einführen. Je stärker ein Problem im Vordergrunde des Interesses steht, desto kürzer kann die Einleitung gehalten werden.

3. Das Ziel der Arbeit muß schon in der Einleitung klar ausgesprochen werden. Es soll dabei auch ersichtlich sein, inwieweit die Erreichung des gesteckten Zieles einen im Rahmen der heutigen Physik wertvollen wissenschaftlichen Fortschritt bedeutet.

4. Die Beschreibung von Versuchsapparaten soll sich keinesfalls in technische Einzelheiten verlieren. Nur apparative Neuheiten von grundsätzlicher Bedeutung sind von Interesse. Die bildliche Wiedergabe von Apparaten soll durch schematische Zeichnung, nicht durch Photographie erfolgen.

5. Es ist fast immer ausreichend, von den Meßreihen ein typisches Beispiel herauszugreifen. An diesem Beispiel soll aber ersichtlich bzw. kontrollierbar sein, wie die Auswertung erfolgt ist, wie die Rechnungen durchgeführt wurden, welche Korrekturen angebracht sind usw.

6. Die Meßergebnisse sind *entweder* in Tabellen *oder* in Kurven wiederzugeben. Nur in Ausnahmefällen kann es gerechtfertigt sein, dasselbe Zahlenmaterial sowohl in Tabellen wie in Kurvenform zu veröffentlichen.

7. Die Lesbarkeit einer Arbeit gewinnt sehr, wenn die Figuren und Tabellen durch gut durchdachte Beschriftung an sich schon verständlich sind. Jedenfalls sollen alle Figuren und Tabellen mit Unterschriften bzw. Überschriften versehen sein.

8. In theoretischen Arbeiten sollen die mathematischen Ausführungen gerade so ausführlich veröffentlicht werden, daß der Leser die vom Verfasser überwundenen Schwierigkeiten nicht nochmals von neuem überwinden muß. Elementare Rechnungen dürfen nur ganz kurz angedeutet werden. In Zweifelsfällen empfiehlt es sich, Zwischenrechnungen als Anhang in kleinem Druck zu bringen.

9. Die Diskussion der Ergebnisse und die sonstigen allgemeinen Erörterungen sollen in ihrer Ausführlichkeit dem Umfang der in der Arbeit gewonnenen neuen Erkenntnisse entsprechen. Eine kurze Meßreihe berechtigt noch nicht dazu, einen großen Fragenkomplex lehrbuchartig aufzurollen.

10. Jede Arbeit muß in sich abgeschlossen sein. Arbeiten, welche allein auf einen Versuchsvorschlag oder nur auf eine Verbesserung von Meßverfahren oder Meßinstrumenten abzielen, können in der Regel nicht aufgenommen werden.

11. Dissertationen oder Habilitationsschriften können nicht in voller Breite aufgenommen werden. Nur solche Auszüge werden veröffentlicht, die den vorliegenden Richtlinien entsprechen. Die Auszüge sind in einer Fußnote als gekürzte Dissertation usw. zu kennzeichnen.

12. Am Kopf jeder Arbeit soll eine Inhaltsangabe in Kleindruck stehen. In diese Inhaltsangabe sollen vor allem die Punkte aufgenommen werden, welche der Verfasser als seine neuen Ergebnisse und damit als den durch seine Arbeit erzielten wissenschaftlichen Fortschritt ansieht.

Der Herausgeber: H. Geiger.

Zusammensetzung der durch langsame Neutronen erzeugten Cadmium-Strahlung.

Von **R. Fleischmann**, Heidelberg.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 7. Oktober 1938.)

Es werden Versuche angestellt, um durch Untersuchung der Sekundärelektronen auf die Zusammensetzung der durch langsame Neutronen erzeugten γ-Strahlung schließen zu können. Beobachtungen über die Absorbierbarkeit der γ-Strahlung selbst zeigen, daß in ihr keine weichen Anteile vergleichbarer Intensität nachweisbar sind. Die Absorbierbarkeit der koinzidierenden γ-Strahlen wird in Blei gemessen. Aus der Koinzidenzausbeute ($2{,}5 \cdot 10^{-3}$ bei einem Raumwinkelbruchteil von 0,13) wird auf die Zahl der ausgesandten Quanten geschlossen und dafür 2 bis 3 gefunden. Es wird darauf hingewiesen, daß ein ähnlicher Schluß auf Grund der γ-Strahlintensität schwierig wäre. Die früher festgestellte näherungsweise Übereinstimmung der γ-Intensität für verschiedene Stoffe wird in diesem Zusammenhang behandelt. Die Aussendung von Elektronen aus Cadmium wird untersucht und gefunden, daß dünne Cd-Schichten nur wenige primäre Elektronen aussenden. Der Koeffizient des inneren Photoeffekts + innerer Paarbildung ist $\sim (0{,}18 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-2}$.

1. Fragestellung. In einer früheren Untersuchung[1]) wurde bereits festgestellt, daß von Cd beim Einfangen eines langsamen Neutrons gleichzeitig mehr als ein γ-Strahl ausgesandt wird. Dies wurde durch das Auftreten von Koinzidenzen in zwei Zählrohren, zwischen denen sich Cd befand, nachgewiesen. Dieses Ergebnis wurde von Aoki[2]) bestätigt und die Versuche auf einige andere Elemente ausgedehnt. Da beim Einfangen des Neutrons auf Grund der Massendefekte eine Bindungsenergie von etwa 8 bis 9 e-MV frei wird, die mittlere Quantenenergie bei Cd jedoch nur etwa 4 e-MV beträgt, so ist die Aussendung von mehr als einem Quant wohl verständlich. Der durch das Einfangen des Neutrons entstehende hochangeregte Kern besitzt nach den bewährten Bohrschen Vorstellungen über den Kernbau Anregungsniveaus in sehr dichter Folge. Man könnte zunächst erwarten, daß die Energieabgabe so vor sich geht, daß Kaskadensprünge erfolgen, bei denen Quanten kleinerer Energie ausgesandt werden. Andererseits ist es aber auch möglich, daß kleinere Sprünge wegen geringerer Übergangswahrscheinlichkeiten oder eventuell infolge von Auswahlverboten gegenüber größeren Sprüngen vollkommen zurücktreten, so daß nur wenige große Sprünge vorkommen. Um zwischen diesen Möglichkeiten zu entscheiden, wurden die unten beschriebenen Versuche über die Zusammen-

[1]) R. Fleischmann, ZS. f. Phys. **103**, 113, 1936 (besonders Ziffer 6). — [2]) H. Aoki, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **19**, 799, 1937.

setzung der γ-Strahlung angestellt. Außerdem sollte auch die ausgesandte Elektronenstrahlung untersucht und die Häufigkeit innerer Umwandlung und Paarbildung abgeschätzt werden.

Zur Untersuchung harter γ-Strahlung von geringer Intensität hat sich das von Bothe und Kolhörster[1]) herrührende und von Becker und Bothe[2]) auf die γ-Strahlung von Beryllium und Bor angewandte Koinzidenzverfahren besonders gut bewährt. Es besteht in der Messung der Absorbierbarkeit der durch die γ-Strahlung aus einer dicken Schicht ausgelösten Sekundärelektronen mit Hilfe von Koinzidenzen. Daher wurde versucht, dieses Verfahren durch Verwendung besonders dünnwandiger Zählrohre auch auf die Frage nach der Zusammensetzung der Strahlung und besonders nach weichen Anteilen anzuwenden. Außerdem wurde versucht, eindeutige Aussagen durch Bestimmung der Absorbierbarkeit der ausgesandten Strahlen selbst zu erhalten. Schließlich gelang es auch, die Absorbierbarkeit der koinzidierenden γ-Quanten in Blei zu messen.

2. *Absorbierbarkeit der Sekundärelektronen.* Um durch Untersuchung der Sekundärelektronen Aussagen über die Zusammensetzung der γ-Strahlen machen zu können, wurde folgendermaßen vorgegangen. Neutronenquelle, Bleipanzer und Paraffinaufstellung war ebenso wie bei früheren Versuchen[3]). Der jetzt verwendete Koinzidenzverstärker hatte eine Trennzeit von $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Sekunden. Die beiden Zählrohre waren jedoch etwas anders als früher gebaut. Sie hatten eine Wandstärke von 1 mm Zn, einen Durchmesser von 3 cm und 10 cm Länge und besaßen auf den einander zugekehrten Seiten dünne Glimmerfenster, so daß ein koinzidenzerzeugendes Elektron im Mindestfall nur 0,004 g/cm² Glimmer zu durchdringen brauchte, gegenüber 0,162 g/cm² Aluminium bei den früheren Messungen. In Fig. 1a sind Aufstellung und Messungen wiedergegeben. Die Kurve zeigt keinen ausgeprägten Steilabfall bei kleinen Absorberdicken, der auf weiche Anteile hätte schließen lassen. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die Auslösung der Elektronen in einer Schicht von annähernd Sättigungsdicke vor sich ging (Zählrohrwand). Bei einer solchen Anordnung ist die Nachweiswahrscheinlichkeit für harte Quanten größer als für weiche, da mit zunehmender Quantenenergie der Absorptionskoeffizient für Quanten zwar kleiner wird, die Abnahme aber überkompensiert wird durch Vergrößerung der Austrittstiefe der Sekundärelektronen. Die Nachweiswahrscheinlichkeit ist näherungsweise proportional $h\nu^{3/4}$ (vgl. Abschnitt 6).

[1]) W. Bothe und W. Kolhörster, Naturwissensch. **16**, 1045, 1928. — [2]) H. Becker und W. Bothe, ZS. f. Phys. **76**, 421, 1932. — [3]) R. Fleischmann, a. a. O.

Als nächster Versuch wurden daher sehr dünnwandige Aluminiumzählrohre in Betrieb gesetzt, aus schräger Richtung bestrahlt und Koinzidenzen beobachtet (Fig. 1b). Hierbei ist die Nachweiswahrscheinlichkeit für große und mittlere Quantenenergien vermindert, entsprechend dem Verhältnis Zählrohrdicke : Reichweite der Elektronen. Sie beträgt gegenüber der für Sättigungsdicke bei 4,1 e-MV etwa 2,5%, bei 0,3 e-MV etwa 25%. Die Zählrohre waren aus Aluminiumblech von 50 μ Wandstärke (0,0135 g/cm^2), hatten 2 cm Durchmesser und 10 cm Länge und waren mit Argon von Atmosphärendruck gefüllt. Damit konnten Quanten oberhalb

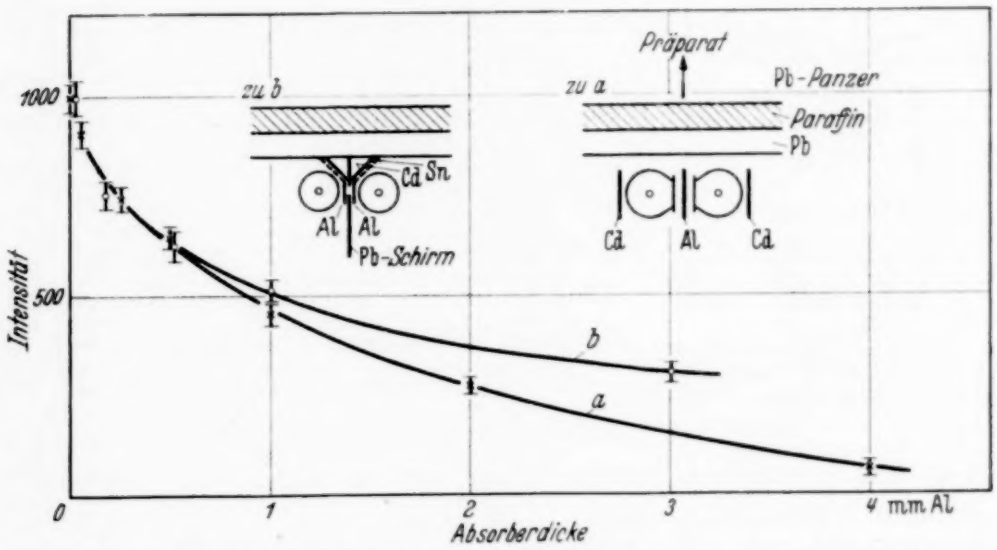


Fig. 1. Absorbierbarkeit der durch Cd-γ-Strahlen ausgelösten Sekundärelektronen.

etwa 0,3 e-MV nachgewiesen werden. Zwischen den Zählrohren befand sich ein Bleischirm von 2 mm Dicke mit einer Aussparung, um nur die von der Zählrohrwand geradlinig verlaufenden Elektronen durchzulassen, gestreute aber abzuhalten. Elektronen, die von der Cadmiumschicht ausgehen, können auf geradlinigem Wege nur das eine Zählrohr durchsetzen, also keine Koinzidenzen erzeugen. Die so erhaltene Kurve ist in Fig. 1b wiedergegeben. Es ergibt sich kein wesentlicher Unterschied gegenüber der Messung bei dickwandigem Zählrohr, insbesondere nicht im Anfangsteil, der nach obiger Überlegung beeinflußt werden müßte, wenn weiche Komponenten in der γ-Strahlung vorhanden wären. Wenn eine Andeutung eines steileren Abfalls im Anfangsteil der Kurve vorhanden sein sollte, so erklärt sie sich zwanglos aus der bekannten Reichweitenverteilung der Rückstoßelektronen homogener γ-Strahlen (vgl. Handbuch der Physik Bd. 23/2, Kap. 2).

3. Absorbierbarkeit der γ-Strahlen. Ein anderer Weg, nach weichen Komponenten in der γ-Strahlung zu suchen, ist die Aufnahme der Absorp-

tionskurve der γ-Strahlen selbst. Diese Messungen wurden mit einem einzigen Aluminiumzählrohr von 50 μ Wandstärke und mit einer Cadmiumschicht von 0,19 mm Dicke hinter einem Filter von 2 g/cm² Graphit und Bleiabsorbern ausgeführt (Fig. 2). Das Graphitfilter diente zur Absorption der vom Cadmium und Blei ausgehenden Elektronen (vgl. dazu Abschnitt 7); es würde selbst Röntgenstrahlen von 18 e-kV erst auf ein Viertel schwächen, ist also ohne Einfluß auf die Zusammensetzung der γ-Strahlen. Der Paraffinschirm von 1,2 cm Dicke, der thermische Neutronen reflektiert, dient zur Vergrößerung der Neutronenintensität am Ort des Cadmiums. Die schwache Paraffin-γ-Strahlung geht in den Nulleffekt ein. Das Ergebnis zeigt Fig. 2. Die Punkte liegen recht genau auf einer Exponentialkurve, die sich hier noch kaum von einer Geraden unterscheidet. Eine Andeutung einer weichen Komponente ist nicht zu erkennen; insbesondere fällt der erste Punkt nicht nach oben heraus. Wir müssen wiederum schließen, daß die Cd-γ-Strahlung keinen weichen Anteil besitzt, der an Intensität vergleichbar wäre mit den Hauptkomponenten. Der Absorptionskoeffizient ergibt sich zu 0,54 cm^{-1} Pb und ist mit früheren Messungen[1]) in Einklang.

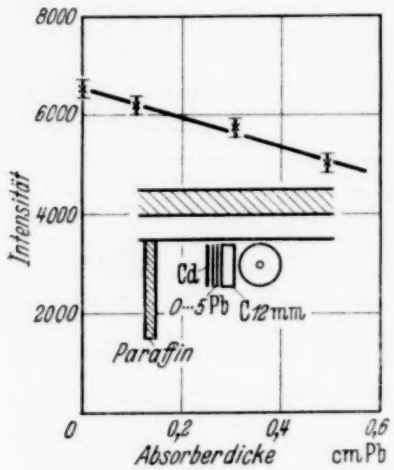


Fig. 2. Absorbierbarkeit der Cd-γ-Strahlen in Pb bei kleiner Absorberdicke.

Nun ist noch eine Grenze für die Quantenenergie eines eventuellen weichen Anteils abzuschätzen. Da der effektive Absorptionskoeffizient für γ-Strahlen bei schrägem Strahlengang oberhalb 2 e-MV praktisch unabhängig von der Energie ist, könnten sich nur Anteile unterhalb dieser Grenze geltend machen. Die Grenze muß aber weiter erniedrigt werden, da eine Summe von Exponentialfunktionen sich von einer einfachen Exponentialfunktion nur dann deutlich unterscheidet, wenn die Absorptionskoeffizienten schon recht verschieden sind. Man kann genügende Unterscheidbarkeit eines Anteils mit dreifachem Koeffizienten annehmen und gelangt so zu einer Grenze von 0,6 e-MV. Es sind also keine Anteile, die unterhalb dieser Grenze liegen würden, nachweisbar.

4. Absorbierbarkeit der koinzidierenden γ-Strahlen. Die früher festgestellten $\gamma\gamma$-Koinzidenzen wurden näher untersucht. Es wurde die Absorbierbarkeit der koinzidierenden γ-Strahlen in Blei gemessen und mit

[1]) ZS. f. Phys. **97**, 265, 1935.

der Absorbierbarkeit, gemessen mit Einzelausschlägen, verglichen. Versuchsanordnung und Ergebnis ist in Fig. 3 wiedergegeben. Die Zählrohre waren aus Aluminium von 1 mm Dicke, hatten 5 cm Durchmesser und 10 cm Länge und waren mit je 2 mm Bleihülle umgeben, um auch sehr schnelle Elektronen abzuhalten. Dazwischen konnte ein Cd-Blech von 0,5 mm Dicke eingeschoben werden. Zwischen dem Cd und den beiden Zählrohren wurden je 0 bis 1 cm Blei als Absorber aufgestellt. Hinter den Zählrohren befanden sich Paraffinschichten von 1,2 cm Dicke, um langsame Neutronen noch zur Cd-Schicht hinzureflektieren. Gemessen wurde einerseits die Einzelausschlagszahl und andererseits die Koinzidenzzahl in Abhängigkeit von der Bleidicke; es wurde das Verhältnis von Koinzidenzzahl zu Einzelausschlagszahl gebildet und dieses in die Figur eingetragen. Als Abszisse ist die Dicke des Absorbers zwischen Cadmium und dem einen Zählrohr aufgetragen. In beiden Fällen ergaben sich Exponentialkurven mit praktisch übereinstimmenden Absorptionskoeffizienten. Aus den Einzelausschlägen folgt $\mu = 0{,}87\ \mathrm{cm^{-1}\ Pb}$, aus dem Koinzidenzbruchteil $\mu = 0{,}82\ \mathrm{cm^{-1}\ Pb}$. Wegen des durch die eng benachbarte Aufstellung der Zählrohre sehr schrägen Strahlengangs im Absorber ist der effektive Absorptionskoeffizient stark erhöht. Die Übereinstimmung bedeutet, daß die koinzidierenden γ-Strahlen nicht weicher sind als die mit Einzelausschlägen nachweisbaren. Der Versuch zeigt wiederum das Fehlen weicher Anteile. Auch geht daraus hervor, daß nicht etwa Sekundärprozesse, wie die Vernichtung von Positronen, die durch Paarbildung oder durch innere Umwandlung der harten γ-Strahlen entstehen, die Ursache der hier beobachteten Koinzidenzen sind.

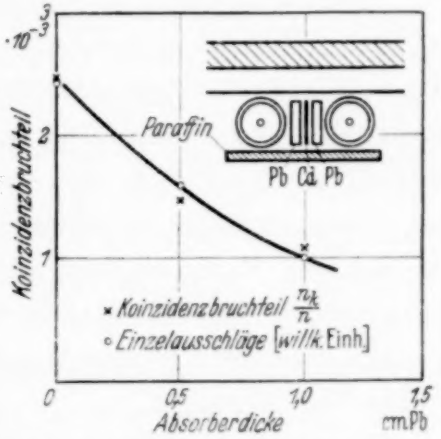


Fig. 3. Absorbierbarkeit der γ-Strahlen, gemessen mit Einzelausschlägen und mit Koinzidenzen (aufgetragen ist der Koinzidenzbruchteil n_k/n).

5. Zahl der koinzidierenden γ-Strahlen. Experimentell bestimmt ist das Verhältnis der Koinzidenzen zu den Einzelausschlägen. Die Zahl der Quanten m läßt sich berechnen, wenn der wirksame Raumwinkel und die Nachweiswahrscheinlichkeit für Quanten bekannt ist. Diese letztere ist eine Funktion der Quantenenergie. Man erhält daher auch verschiedene Werte für m je nach der der Berechnung zugrunde gelegten Energie der Quanten. Eine davon unabhängige Beziehung zwischen m und $h\nu$ erhält man aus dem Umstand, daß die Energiesumme der bei einem Einfang-

prozeß ausgesandten m koinzidierenden Quanten gleich der Bindungsenergie des Neutrons sein muß. Diese beträgt bei Cd nach massenspektroskopischen Daten 8 bis 9 e-MV. Wir diskutieren die Frage unter der Annahme, daß die koinzidierenden Quanten alle die gleiche Energie von $\frac{8{,}5}{m}$ e-MV erhalten.

Für das Verhältnis der Koinzidenzzahlen zu den Einzelausschlägen des einen Zählrohrs n_k/n wurde ohne Absorber $(2{,}5 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$ gefunden. Der Raumwinkelbruchteil ω, unter dem die Strahlung des Cd-Bleches auf das Zählrohr wirkte, war $^1/_{7{,}75}$: er wurde experimentell bestimmt. Dazu wurde das eine Zählrohr einmal mit einem sehr schwachen flächenförmigen Radiumpräparat bestrahlt, das gleiche Form besaß und in gleicher Aufstellung wie das Cd verwendet wurde und ein zweites Mal mit einem stärkeren Präparat gleicher Form aus viel größerem Abstand, für den der Raumwinkel leicht berechnet werden konnte. Das Stärkeverhältnis der beiden Präparate war genau bekannt, das Ausschlagsverhältnis wurde gemessen. So ergab sich der wirksame Raumwinkelbruchteil mit großer Genauigkeit.

Die Nachweiswahrscheinlichkeit w für γ-Quanten wurde unter Benutzung von Messungen und Umrechnungen von v. Droste[1]) und von Buchmann[2]) berechnet. Die so für einige Quantenenergien und Aluminiumzählrohr erhaltenen Werte sind in Tabelle 1, Spalte 2 zusammengestellt.

Tabelle 1.

$h\nu$ in e-MV	Nachweiswahrscheinlichkeit w	Zahl der Quanten m	Energiesumme $m \cdot h\nu$
1	$0{,}66 \cdot 10^{-2}$	3,9	3,9
2,65	$1{,}38 \cdot 10^{-2}$	2,4	6,4
4,1	$1{,}96 \cdot 10^{-2}$	2,2	9,0

Die Anzahl m der ausgesandten Quanten wird auf folgende Weise erhalten: Sei die Zahl der Einfangprozesse A, die Zahl der von Cd herrührenden Einzelausschläge des einen Zählrohrs n, der dabei ausgenutzte Raumwinkelbruchteil ω, die Nachweiswahrscheinlichkeit w und die Zahl der Koinzidenzen n_k. Wegen der Symmetrie der Anordnung sind die Einzelausschlagszahlen und der Raumwinkel für beide Zählrohre gleich. Dann ist $n = A \cdot W_1$, wobei $W_1 = m \cdot \omega \cdot w$ ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Nachweis eines der übrigen $m - 1$ Quanten im anderen Zählrohr ist $W_2 = (m - 1) \cdot \omega \cdot w$. Dann ist $n_k = A \cdot W_1 \cdot W_2$ und $n_k/n = W_2$

[1]) G. v. Droste, ZS. f. Phys. **100**, 529, 1936; **104**, 474, 1937. — [2]) E. Buchmann, Phys. ZS. **38**, 817, 1937.

$= (m-1)\cdot\omega\cdot w$. Durch Einsetzen sind die Werte für m von Tabelle 1, Spalte 3 berechnet. Betrachtet man die $h\nu$-Werte der Spalte 1 als mittlere Quantenenergie der koinzidierenden Quanten, so gibt $m\cdot h\nu$ die ausgestrahlte Gesamtenergie an, die wie oben erwähnt, für Cadmium 8 bis 9 e-MV ergeben sollte. Das Produkt ist in Spalte 4 angegeben. Man erkennt, daß die richtige Gesamtenergie nur herauskommt, wenn man $h\nu \sim 4$ e-MV und $m \sim 2{,}3$ setzt. Würde man für n_k/n oder für w einen Fehler von $\pm 40\%$ annehmen, so würde sich für m 1,6 bzw. 3,5 ergeben. Man darf daher schließen, daß im Durchschnitt 2 bis 3 Quanten ausgesandt werden. Der Einfluß des Fehlers wird dadurch verhältnismäßig gering, daß $(m-1)$ in die Berechnung eingeht und dabei m eine kleine Zahl ist.

Aoki (a. a. O.) hat für die Koinzidenzausbeute einen um 20% höheren Wert gefunden. Er leitet daraus $m = 3$ ab, jedoch unter der willkürlichen Annahme, daß die Nachweiswahrscheinlichkeit im Zählrohr unabhängig von der Quantenenergie 1% ist.

6. Intensität der γ-Strahlen. Außer den besprochenen Erscheinungen könnte man noch die Intensität der γ-Strahlen im Vergleich mit der Zahl der absorbierten Neutronen heranziehen, um zu einer Aussage über die Zahl der ausgesandten Quanten zu gelangen. Diesen Weg haben Griffiths und Szillard[1]) versucht. Man kann aber zeigen, daß man auf diesem Wege nicht zu genauen Resultaten kommt. Versuche dieser Art wurden daher hier nicht angestellt. Griffiths und Szillard kommen zu dem Schluß, daß mindestens 7 Quanten ausgesandt werden. Sie machen diese Aussage unter dem Vorbehalt einer Nachprüfung nach einer unabhängigen Methode ohne nähere Angabe über die Berechnungsweise und das Versuchsverfahren. Es besteht also wohl kein tatsächlicher Widerspruch zu dem Ergebnis vom Abschnitt 5.

Die Unbestimmtheit des Verfahrens ergibt sich aus folgenden Überlegungen. Bekanntlich hängt die Nachweiswahrscheinlichkeit harter Quanten im Zählrohr stark von der Quantenenergie ab. Zwischen 1 und 3 e-MV ist sie näherungsweise proportional $h\nu^{3/4}$ [2]). Für Aluminiumzählrohre ist diese Beziehung noch bei 10 e-MV näherungsweise gültig, für Zink- und Kupferzählrohre wäre zwischen 5 und 10 e-MV Proportionalität mit etwa $h\nu^{0{,}9}$ anzusetzen. Der Unterschied rührt von der Absorption durch Paarbildung her. Für die folgende Überschlagsrechnung verwenden wir Proportionalität mit $h\nu^{3/4}$. Werden statt eines Quants mit der Energie $h\nu$ e-MV m Quanten mit $h\nu/m$ e-MV ausgesandt, so ist die gesamte Nachweis-

[1]) J. H. E. Griffiths u. L. Szillard, Nature **139**, 323, 1937. — [2]) H. J. v. Baeyer, ZS. f. Phys. **95**, 417, 1935.

wahrscheinlichkeit dafür $m \cdot (h\nu/m)^{3/4}$ statt $(h\nu)^{3/4}$, das Verhältnis ist also proportional $m^{1/4}$. Bei Verteilung einer Energie auf zehn gleiche Quanten würde die Ausschlagszahl des Zählrohrs nur das 1,78fache, bei vier gleichen Quanten das 1,41fache, bei zweien das 1,19fache derjenigen Zahl betragen, die man erhält, wenn jeweils ein einziges Quant mit der Gesamtenergie ausgesandt wird. Man sieht, daß die mit dem Zählrohr gemessene Intensität der γ-Strahlung nur verhältnismäßig wenig von der Zusammensetzung der Strahlung abhängt[1]). Daher müßte man eine viel größere Versuchsgenauigkeit erreichen können, als das heute möglich ist, um auf die Zahl der Quanten schließen zu können.

Durch die geringe Abhängigkeit der Ausschlagszahl eines Zählrohrs von der Zusammensetzung der Strahlung erklärt sich aber auch eine andere merkwürdige experimentelle Erscheinung. Durch Untersuchung an verschiedenen Stoffen, die unter Bestrahlung mit langsamen Neutronen γ-Strahlen aussenden, ist festgestellt, daß die Intensität der γ-Strahlen bei gleicher Neutronenintensität nahezu gleich groß ist[2]). Dieser experimentelle Befund könnte schwer verständlich erscheinen, da nicht anzunehmen ist, daß die verschiedenen Stoffe das gleiche Spektrum aussenden, zumal die mittlere Quantenenergie beträchtlich verschieden ist. Nach den obigen Überlegungen sind aber nur geringe Unterschiede zu erwarten — $\pm$ 30% bei Aussendung von 2 bis 10 Quanten — falls die Energiesumme der Quanten gleich groß ist. Nach massenspektroskopischen Daten wird beim Einfangen eines Neutrons in Kernen mit Atomgewicht oberhalb von rund 40 etwa 8 bis 9 e-MV frei. Für die untersuchten Stoffe mit Ausnahme von Wasserstoff stimmt also die Bindungsenergie praktisch überein und es ist nicht verwunderlich, daß tatsächlich eine näherungsweise übereinstimmende γ-Intensität gefunden wird.

7. *Aussendung von Elektronen.* Es sollte untersucht werden, ob von Cadmium auch primäre Elektronen ausgesandt werden, d. h. solche, die durch innere Umwandlung von γ-Strahlen entstehen. Dazu wurde die Abhängigkeit der γ-Strahlen und der Elektronenstrahlung von der Schichtdicke des Cadmiums mit einem Al-Zählrohr von 50 μ Wandstärke bestimmt. Um den Einfluß der Elektronen und der γ-Strahlung zu trennen, wurden zwischen Cadmium und Zählrohr Graphitplatten von 1,0 und 2,0 g/cm^2 Dicke als Filter eingeschaltet. Die Anordnung und den Intensitätsverlauf in Ab-

[1]) Auf diesen Punkt hat schon H. Meier-Leibnitz, ZS. f. Phys. **101**, 478, 1936 hingewiesen. — [2]) R. Fleischmann, ebenda **100**, 307, 1936; J. H. E. Griffiths u. L. Szillard, a. a. O.; R. D. Hill u. A. A. Townsend, Proc. Phys. Soc. London **50**, 534, 1938.

hängigkeit von der Dicke des Graphitfilters und von der Dicke der Cadmiumschicht zeigt Fig. 4. Ohne Graphit werden im wesentlichen die vom Cadmium ausgehenden Elektronen gezählt, mit Graphitfilter von 2,0 g/cm² nur die γ-Strahlen. Die entsprechenden Punkte sind in Fig. 5 eingetragen. Die Kurvenform in Fig. 4 hängt stark von der Cadmiumdicke ab. Bei kleiner Cadmiumdicke ist die in Graphit ausgelöste Elektronenintensität größer als die vom Cadmium ausgehende, bei großer Cd-Dicke ist es umgekehrt. In Fig. 5 ist die Abhängigkeit der γ-Intensität und der Elektronenintensität von der Schichtdicke aufgetragen. Der Anstieg der γ-Kurve ist bestimmt durch die Absorbierbarkeit der langsamen *Neutronen* in Cadmium, der in der anderen Kurve im wesentlichen durch die Absorbierbarkeit der *Elektronen* in Cd. Die eingezeichnete Kurvenform entspricht etwa der Erwartung auf Grund der Absorptionskoeffizienten. Die Elektronenintensität enthält einen Anteil, der von der Auslösung von Sekundärelektronen in der

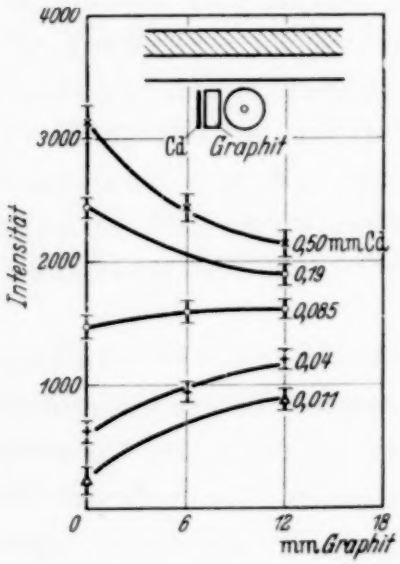


Fig. 4. Strahlungsintensität gemessen mit dünnwandigem Zählrohr mit und ohne Graphitfilter.

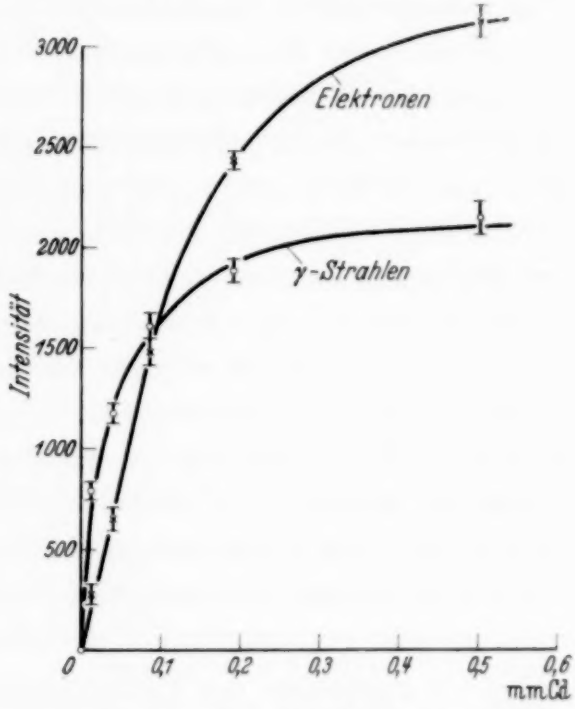


Fig. 5. β- und γ-Intensität als Funktion der Cd-Dicke.

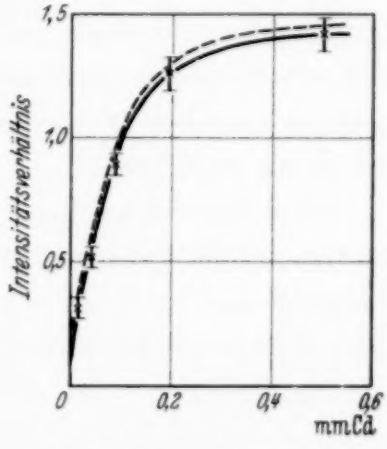


Fig. 6. Verhältnis von β/γ-Strahlen. Punkte und ausgezogene Kurve nach Anbringen einer Korrektion für Auslösung von Sekundärelektronen in der Zählrohrwand, gestrichelte Kurve ohne Korrektion.

Wand des Zählrohrs herrührt. Er ist auf etwa 2,5% der Sättigungsintensität zu schätzen. Zieht man diesen Teil von der Elektronenintensität ab und bildet man dann das Verhältnis von β- zu γ-Strahlen, so ergibt sich die in Fig. 6 dargestellte ausgezogene Kurve. Die gestrichelte Kurve wird ohne Anbringung dieser Korrektion erhalten. Man sieht, daß eine starke Abhängigkeit dieses Verhältnisses von der Schichtdicke besteht. Der Ordinatenwert für Dicke 0 mm ist auf etwa 0,15 zu schätzen, der Fehler auf etwa $\pm$ 0,10. Durch inneren Photoeffekt und innere Paarbildung der γ-Strahlung entsteht also etwa $^1/_{10}$ der Elektronenmenge, die die gleiche γ-Strahlung maximal durch Fremdauslösung in dicker Cd-Schicht erzeugen kann. Für die Fremdausbeute bei Sättigungsintensität findet man in einer zu Abschnitt 5 analogen Weise $1{,}8 \cdot 10^{-2}$. Der Koeffizient für den inneren Photoeffekt + innere Paarbildung beträgt daher $\sim (0{,}18 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-2}$. Leider ist es schwierig, eine größere Meßgenauigkeit zu erreichen.

Zusammenfassung und Diskussion. Das Ergebnis der Untersuchung läßt sich also etwa folgendermaßen zusammenfassen. In der γ-Strahlung lassen sich keine weichen Quanten nachweisen, die sich durch ihre Absorbierbarkeit in Blei von den harten unterscheiden lassen. Das bedeutet, bei vorsichtiger Schätzung, das Fehlen von Anteilen von vergleichbarer Intensität unterhalb 0,6 e-MV. Für die koinzidierenden γ-Strahlen wurde ebenfalls die Absorbierbarkeit in Blei bestimmt und mit der Absorbierbarkeit für einzelne Quanten verglichen. Es ergab sich der gleiche Absorptionskoeffizient. Mit Hilfe der Nachweiswahrscheinlichkeit von Quanten in Zählrohren ergibt sich als Zahl der im Elementarprozeß ausgesandten Quanten etwa 2,2. Diese Zahl kann nicht sehr genau sein, weil der Absolutwert der Nachweiswahrscheinlichkeit nur mit mäßiger Genauigkeit bekannt ist. Doch würde sie sich selbst bei einem Fehler von $\pm$ 40% nur auf 1,6 erniedrigen oder auf 3,5 erhöhen. Die Beobachtungen von Aoki (a. a. O.) sind damit verträglich.

Nach den Bohrschen Vorstellungen vom Kernbau und auf Grund experimenteller Erfahrung wissen wir, daß die Neutronenniveaus bei einer Anregung von 8 bis 9 e-MV bei Cd einen Abstand von größenordnungsmäßig 10 bis 100 eV haben. Zwar ist bei Dipolstrahlung die Übergangswahrscheinlichkeit $\sim \nu^3$. Wegen der dichten Lagerung der Niveaus sollten trotzdem Übergänge mit kleinem Energieunterschied in großer Zahl vorkommen. Daß die zugehörigen weichen Quanten experimentell nicht nachweisbar sind, erklärt sich wohl auf folgende Weise: Die in Betracht kommenden Niveaus kommen durch gleichzeitige Anregung vieler Kernbestandteile, also durch Kombinationen einer größeren Zahl von einzelnen

Anregungstermen zustande. Diese Kombinationen müssen für zwei nahe benachbarte Niveaus sehr verschieden sein, daher wird auch die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen ihnen sehr klein[1]).

Die Abhängigkeit der β- und γ-Strahlen von der Schichtdicke wurde aufgenommen. Der Verlauf für das Verhältnis von β- zu γ-Strahlen zeigt, daß primäre β-Strahlen nur mit einer Intensität ausgesandt werden, die etwa 10% der Elektronenstrahlung aus dicker Schicht beträgt, entsprechend einem Koeffizienten für innere Umwandlung und Paarbildung von $\sim 0{,}18 \cdot 10^{-2}$. Das ist gut verträglich mit theoretischen Rechnungen von Jaeger und Hulme[2]). Danach würde man für die innere Paarbildung bei $h\nu = 4$ e-MV und Dipolstrahlung etwa $0{,}15 \cdot 10^{-2}$ erwarten. Der innere Photoeffekt ist im Vergleich dazu unbeträchtlich.

Das Ergebnis stimmt nicht mit Folgerungen überein, die Herszfinkiel und Wertenstein[3]) aus ihren Versuchen gezogen haben. Sie glaubten eine größere Zahl von Elektronen festgestellt zu haben als durch die gewöhnlichen Sekundärprozesse erklärt werden können. Nach dem Obigen besteht kein Grund, nach neuen Entstehungsursachen für Elektronen zu suchen.

Herrn Prof. Bothe danke ich herzlich für sein Interesse an dieser Untersuchung. Es wurden Hilfsmittel, die ihm von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellt sind, mitbenutzt.

Heidelberg, Sept. 1938, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung.

---

[1]) Bemerkung von N. Bohr auf der Tagung der British Association, Cambridge 1938. — [2]) J. C. Jaeger und H. R. Hulme, Proc. Roy. Soc. London (A) **148**, 708, 1935. — [3]) H. Herszfinkiel und L. Wertenstein, Nature **137**, 106, 1936.

Zur Quantenelektrodynamik.

Von **K. F. Novobatzky** in Budapest.

(Eingegangen am 19. August 1938.)

Die Quantelung des elektromagnetischen Feldes und die Aufstellung des Hamiltonoperators der Quantenelektrodynamik erfolgt auf eine Weise, die frei ist von jenen lästigen Folgen, die nach Dirac den bekannten Ableitungen anhaften.

Die Schwierigkeiten, die sich der Quantelung des elektromagnetischen Feldes entgegensetzen, hat Rosenfeld[1]) zusammenfassend besprochen. Sie bestehen darin, daß der konjugierte Impuls des skalaren Potentials identisch verschwindet und dadurch die Aufstellung eines kanonischen Systems der Feldgleichungen nur durch künstliche Methoden erzwungen werden kann[2]). Relativ einfach verfährt Fermi[3]), der die bekannte Lorentzsche Gleichung: $\mathrm{div}_4\, \varphi = 0$, Verschwinden der Viererdivergenz des Potentials, als Nebenbedingung hinzunimmt. Wie jedoch Dirac in seinem bekannten Lehrbuch ausführt, kann diese Viererdivergenz nicht als identischer Nulloperator in die Quantentheorie übernommen werden, da sie z. B. mit dem skalaren Potential nicht vertauschbar ist. Die Lorentzgleichung und auch diejenigen Maxwellschen, die mit ihrer Hilfe abgeleitet werden, müssen in der Quantentheorie ihre absolute Gültigkeit verlieren und zu sogenannten Ergänzungsgleichungen abgeschwächt werden. Das erscheint reichlich unwahrscheinlich. Man kann sich des Eindruckes nicht erwehren, daß die künstliche Begriffsbildung des Ergänzungsoperators eine Verlegenheitskonstruktion der Quantentheorie darstellt, die mit dem Wesen der Sache nichts gemein hat.

Vorliegende Arbeit setzt sich zum Ziele, die Quantelung des Feldes und die Aufstellung des Fermischen Hamiltonoperators, der sich in der Theorie der Strahlung so verzüglich bewährt, auf einem Wege durchzuführen, der die Lorentzgleichung umgeht und dadurch deren üble Folgen vermeidbar macht.

Die Art der Quantelung wird sich in allen jenen Fällen bewähren, in denen die Lagrange-Funktion aus Rotationsgrößen aufgebaut ist.

---

[1]) L. Rosenfeld, Ann. d. Phys. **5**, 113, 1930. — [2]) W. Heisenberg und W. Pauli, ZS. f. Phys. **56**, 1, 1929. — [3]) E. Fermi, Rev. mod. Phys. **4**, 131, 1932.

Es werden folgende Bezeichnungen gebraucht:

Koordinaten der Raum-Zeitwelt $x^1, x^2, x^3, x^0 = ct$.

Skalares Potential $-\varphi_0$, Vektorpotential $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Feldstärken $f_{10} = E_x, f_{20} = E_y, f_{30} = E_z, f_{23} = H_x, f_{31} = H_y, f_{12} = H_z$.

Diese Größen sollen im Kubus $V = l^3$ nach den vollständigen orthogonalen Funktionenreihen $\sin \Gamma_k$, bzw. $\cos \Gamma_k$ entwickelt werden.

$$\Gamma_k = \frac{2\pi}{l}(k_1 x^1 + k_2 x^2 + k_3 x^3) + \vartheta_k. \tag{1}$$

Die ganzen Zahlen k_1, k_2, k_3 bestimmen als Komponenten den Vektor k. Sein Betrag ist $K = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}$. Der Vektor k gibt die Richtung der Wellennormale von $\sin \Gamma_k$ und $\cos \Gamma_k$ an. Fällt ein Vektor in die Richtung von k, so heißt er longitudinal, steht er senkrecht zu k, so wird er transversal genannt. Die Größe $C = c\left(\frac{8\pi}{V}\right)^{1/2}$ (c gleich Lichtgeschwindigkeit) wird als Normierungsfaktor gebraucht. Die Entwicklungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= C\sum_k q_0^k \cos \Gamma_k, \quad & \varphi_1 &= C\sum_k q_1^k \sin \Gamma_k, \\ \varphi_2 &= C\sum_k q_2^k \sin \Gamma_k, \quad & \varphi_3 &= C\sum_k q_3^k \sin \Gamma_k, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{01} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^0} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x^1} = C\sum_k \left(q_1'^k + \frac{2\pi}{l} k_1 q_0^k\right) \sin \Gamma_k \\ &= C\sum_k f_{01}^k \sin \Gamma_k, \\ &\text{mit} \\ f_{01}^k &= q_1'^k + \frac{2\pi}{l} k_1 q_0^k. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ähnlich für f_{02} und f_{03}. Der Strich bedeutet Differentiation nach x^0. Ebenso

$$\left.\begin{aligned} f_{23} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^3} = C\sum_k \frac{2\pi}{l}(k_2 q_3^k - k_3 q_2^k) \cos \Gamma_k \\ &= C\sum_k f_{23}^k \cos \Gamma_k, \\ &\text{mit} \\ f_{23}^k &= \frac{2\pi}{l}(k_2 q_3^k - k_3 q_2^k). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ähnliche Ausdrücke gelten für f_{31} und f_{12}. Die Komponenten des Viererstromes seien $s_0 = -\varrho$, $s_1 = \varrho x'^1$ usw. In entwickelter Form

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= C\sum_k s_0^k \cos \Gamma_k, \quad & s_1 &= C\sum_k s_1^k \sin \Gamma_k, \\ s_2 &= C\sum_k s_2^k \sin \Gamma_k, \quad & s_3 &= C\sum_k s_3^k \sin \Gamma_k. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Feldgleichungen schreiben sich in der Form

$$\frac{\partial f_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial f_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial f_{03}}{\partial x^3} = 4\pi s_0, \quad \frac{\partial f_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x^3} = 4\pi s_1 \text{ usw.}, \tag{6}$$

oder in den Entwicklungskoeffizienten

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi}{l}(k_1 f^k_{01} + k_2 f^k_{02} + k_3 f^k_{03}) &= 4\pi s^k_0, \\ f'^k_{01} + \frac{2\pi}{l}(k_3 f^k_{31} - k_2 f^k_{12}) &= 4\pi s^k_1 \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

In der ersten Gleichung (6) bzw. (7) liegt, wie die zweite Arbeit von Heisenberg und Pauli[1]) bezeigt, die ganze Schwierigkeit des Problems. Sie hat ganz und gar nicht die Form einer kanonischen Gleichung. Dazu müßte sie eine Zeitdifferentiation enthalten, wie die übrigen drei Gleichungen. Der leitende Gedanke der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, diese Gleichung aus dem kanonischen System auszuschalten, indem man sie identisch befriedigt und dann eine Hamilton-Funktion nur für die übrigen drei Gleichungen aufstellt. Die Befriedigung der ersten Gleichung (7) gelingt ganz leicht, indem man die Größe q^k_0 aus ihr berechnet und in die übrigen drei Gleichungen einsetzt. Diese Auszeichnung der Größe q_0 bzw. q^k_0 ist durch die ausgezeichnete Rolle von t im kanonischen System bedingt und führt deshalb, wie die folgenden Rechnungen zeigen, zu keiner lästigen mathematischen Asymmetrie. In den Potentialen geschrieben lauten die Gleichungen (7)

$$\frac{2\pi}{l}\Big\{k_1\Big(q'^k_1 + \frac{2\pi}{l}k_1 q^k_0\Big) + k_2\Big(q'^k_2 + \frac{2\pi}{l}k_2 q^k_0\Big) + k_3\Big(q'^k_3 + \frac{2\pi}{l}k_3 q^k_0\Big)\Big\} = 4\pi s^k_0, \tag{8}$$

$$q''^k_1 + \frac{2\pi}{l}k_1 q'^k_0 - \frac{4\pi^2}{l^2}k_2(k_1 q^k_2 - k_2 q^k_1) - \frac{4\pi^2}{l^2}k_3(k_1 q^k_3 - k_3 q^k_1) = 4\pi s^k_1. \tag{9}$$

Aus (8) folgt:

$$\frac{2\pi}{l}q^k_0 = \frac{1}{K^2}[2l s^k_0 - (k_1 q'^k_1 + k_2 q'^k_2 + k_3 q'^k_3)]. \tag{10}$$

---

[1]) W. Heisenberg und W. Pauli, ZS. f. Phys. **59**, 169, 1930.

Dies in (9) und in die entsprechenden zwei anderen Feldgleichungen eingesetzt, ergibt

$$\left.\begin{aligned}
\left(1-\frac{k_1^2}{K^2}\right)X_1^k-\frac{k_1k_2}{K^2}X_2^k-\frac{k_1k_3}{K^2}X_3^k&=4\pi s_1^k-\frac{2i}{K^2}k_1s_0'^k=\sigma_1^k,\\
-\frac{k_1k_2}{K^2}X_1^k+\left(1-\frac{k_2^2}{K^2}\right)X_2^k-\frac{k_1k_3}{K^2}X_3^k&=4\pi s_2^k-\frac{2i}{K^2}k_2s_0'^k=\sigma_2^k,\\
-\frac{k_1k_3}{K^2}X_1^k-\frac{k_2k_3}{K^2}X_2^k+\left(1-\frac{k_3^2}{K^2}\right)X_3^k&=4\pi s_3^k-\frac{2i}{K^2}k_3s_0'^k=\sigma_2^k,
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

wo die Abkürzungen benutzt sind

$$X_i^k=q_i''^k+4\pi^2\frac{K^2}{l^2}q_i^k\quad(i=1,2,3).\qquad(12)$$

Die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität lautet

$$-\frac{\partial s_0}{\partial x^0}+\frac{\partial s_1}{\partial x^1}+\frac{\partial s_2}{\partial x^2}+\frac{\partial s_3}{\partial x^3}=0,$$

oder in den Entwicklungskoeffizienten

$$-s_0'^k+\frac{2\pi}{l}(k_1s_1^k+k_2s_2^k+k_3s_3^k)=0.$$

Auf Grund dieser Gleichung folgt

$$k_1\sigma_1^k+k_2\sigma_2^k+k_3\sigma_3^k=0.\qquad(13)$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht es, das System (11) in homogener Form zu schreiben

$$\left(1-\frac{k_1^2}{K^2}\right)(X_1^k-\sigma_1^k)-\frac{k_1k_2}{K^2}(X_2^k-\sigma_2^k)-\frac{k_1k^3}{K^2}(X_3^k-\sigma_3^k)=0\text{ usw.}\qquad(14)$$

Jetzt ist es wünschenswert, auf die Differentiation nach t überzugehen. Diese wird durch einen Punkt angedeutet. Man hat $\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$. Führt man also statt der X etwas andere Abkürzungen ein

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_i^k&=\ddot{q}_i^k+4\pi^2\nu^{k2}q_i^k-\sigma_i^kc^2\qquad(i=1,2,3),\\
\nu^{k2}&=\frac{K^2c^2}{l^2},
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

mit

so geht das System (14) in folgendes über

$$\left.\begin{aligned}
\left(1-\frac{k_1^2}{K^2}\right)\mathfrak{Y}_1^k-\frac{k_1k_2}{K^2}\mathfrak{Y}_2^k-\frac{k_1k_3}{K^2}\mathfrak{Y}_3^k&=0,\\
-\frac{k_1k_2}{K^2}\mathfrak{Y}_1^k+\left(1-\frac{k_2^2}{K^2}\right)\mathfrak{Y}_2^k-\frac{k_2k_3}{K^2}\mathfrak{Y}_3^k&=0,\\
-\frac{k_1k_3}{K^2}\mathfrak{Y}_1^k-\frac{k_2k_3}{K^2}\mathfrak{Y}_2^k+\left(1-\frac{k_3^2}{K^2}\right)\mathfrak{Y}_3^k&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Diese drei Feldgleichungen sind nicht linear unabhängig. Multipliziert man sie der Reihe nach mit k_1, k_2, k_3 und addiert, so ergibt sich links identisch 0. Es wäre deshalb verfrüht, schon für dieses System eine Hamiltonfunktion aufzustellen. Es würden sich abhängige kanonische Variable ergeben. Erst muß das System (16) auf zwei unabhängige und gleichwertige Gleichungen zurückgeführt werden. Die drei Koeffizienten der ersten Gleichung (16): $\delta_{1i} - \frac{k_1 k_i}{K^2}$ bilden die Komponenten eines transversalen Vektors $\mathfrak{u}$. Ebenso die Koeffizienten der beiden anderen Gleichungen die Komponenten je eines transversalen Vektors $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$. Da sie also in einer (zu k senkrechten) Ebene liegen, können sie durch irgendwelche zwei transversale Vektoren linear ausgedrückt werden. Wir wählen zwei solche Einheitsvektoren und nennen sie $\mathfrak{a}^k$ bzw. $\mathfrak{b}^k$: $(\mathfrak{a}^k, k) = 0$, $(\mathfrak{b}^k, k) = 0$. Bequemlichkeitshalber mögen sie aufeinander senkrecht stehen: $(\mathfrak{a}^k, \mathfrak{b}^k) = 0$. Dann hat man statt (16) die zwei unabhängigen Feldgleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_1^k (\ddot{q}_1^k + 4\pi^2 \nu^{k\,2} q_1^k - \sigma_1^k c^2) + a_2^k (\ddot{q}_2^k + 4\pi^2 \nu^{k\,2} q_2^k - \sigma_2^k c^2) \\ + a_3^k (\ddot{q}_3^k + 4\pi^2 \nu^{k\,2} q_3^k - \sigma_3^k c^2) = 0, \\ b_1^k (\ddot{q}_1^k + 4\pi^2 \nu^{k\,2} q_1^k - \sigma_1^k c^2) + b_2^k (\ddot{q}_2^k + 4\pi^2 \nu^{k\,2} q_2^k - \sigma_2^k c^2) \\ + b_2^k (\ddot{q}_3^k + 4\pi^2 \nu^{k\,2} q_2^k - \sigma_3^k c^2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Diese zwei Gleichungen enthalten folgende zwei unabhängige Variablen:

$$Q_a^k = a_1^k q_1^k + a_2^k q_2^k + a_3^k q_3^k, \quad Q_b^k = b_1^k q_1^k + b_2^k q_2^k + b_3^k q_3^k. \tag{18}$$

Ersichtlicherweise sind Q_a und Q_b^k die zwei Transversalkomponenten des Vektorpotentials q^k (q_1^k, q_2^k, q_3^k) in der Richtung $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$. Daraus ergibt sich sofort die Umkehrung von (18) zu

$$\left.\begin{aligned} q_1^k = a_1^k Q_a^k + b_1^k Q_b^k + \frac{2\pi}{l} k_1 \varrho^k, \quad q_2^k = a_2^k Q_a^k + b_2^k Q_b^k + \frac{2\pi}{l} k_2 \varrho^k, \\ q_3^k = a_3^k Q_a^k + b_3^k Q_b^k + \frac{2\pi}{l} k_3 \varrho^k, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

wo ϱ^k proportional zur Longitudinalkomponente von q^k ist. Die Feldgleichungen erhalten nun folgende endgültige Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{Q}_a^k + 4\pi^2 \nu^{k\,2} Q_a^k - 4\pi c^2 (a_1^k s_1^k + a_2^k s_2^k + a_3^k s_3^k) = 0, \\ \ddot{Q}_b^k + 4\pi^2 \nu^{k\,2} Q_b^k - 4\pi c^2 (b_1^k s_1^k + b_2^k s_2^k + b_3^k s_3^k) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

(An Stelle der σ treten die s, da der longitudinale Anteil der σ in (11) im skalaren Produkt mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ herausfällt.)

Die Hamilton-Funktion für (20) läßt sich unmittelbar aufschreiben in der Form

$$\left.\begin{aligned} H^k = {} & \tfrac{1}{2}\,[P_a^{k2} + 4\pi^2 \nu^{k2} Q_a^{k2} - 8\pi c^2 (a_1^k s_1^k + a_2^k s_2^k + a_3^k s_3^k)] \\ & + \tfrac{1}{2}\,[P_b^{k2} + 4\pi^2 \nu^{k2} Q_b^{k2} - 8\pi c^2 (b_1^k s_1^k + b_2^k s_2^k + b_3^k s_3^k)]. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$P_a = \dot{Q}_a^k$ und Q_a^k, $P_b^k = \dot{Q}_b^k$ und Q_b^k sind die zwei Paare konjugierter Variabeln, für die die bekannten ⁻⁻ R. gelten

$$[P_a^k, Q_a^k] = \frac{\hbar}{i},\ [P_b^k, Q_b^k] = \frac{\hbar}{i},\ \text{alle a }{}^{\text{l}}\text{eren Klammergrößen Null.} \tag{22}$$

Damit ist die Quantelung des Feldes durchgeführt. Es bleibt nur noch übrig, die Feldgrößen in den konjugierten Variablen auszudrücken. (10) und (19) ergeben

$$q_0^k = \frac{l^2}{\pi K^2} s_0^k - \frac{1}{c}\,\dot{\varrho}^k. \tag{23}$$

Nach (19) und (23) sind die Potentiale nur bis auf einen willkürlichen Vierergradienten bestimmt, wie es die Eichinvarianz der Feldgleichungen fordert.

Für die elektrischen Feldgrößen erhält man die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} f_{01}^k &= \frac{1}{c}\,(a_1^k P_a^k + b_1^k P_b^k) + \frac{2l}{K^2}\,k_1 s_0^k, \\ f_{02}^k &= \frac{1}{c}\,(a_2^k P_a^k + b_2^k P_b^k) + \frac{2l}{K^2}\,k_2 s_0^k, \\ f_{03}^k &= \frac{1}{c}\,(a_3^k P_a^k + b_3^k P_b^k) + \frac{2l}{K^2}\,k_3 s_0^k. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Die erste Gleichung (7) ist jetzt tatsächlich identisch befriedigt. Die Größen in dem Schema

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{k_1}{K} & \dfrac{k_2}{K} & \dfrac{k_3}{K} \\ a_1^k & a_2^k & a_3^k \\ b_1^k & b_2^k & b_3^k \end{array}$$

sind die Koeffizienten einer orthogonalen Koordinatentransformation. Es sei festgelegt, daß k, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein Rechtssystem bilden. Dann folgt $[k, \mathfrak{a}] = K\mathfrak{b}$, $K\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = k$, $[\mathfrak{b}, k] = K\mathfrak{a}$. Auf Grund dieser Relationen schreiben sich die magnetischen Feldstärken

$$\left.\begin{aligned} f_{23}^k = \frac{2\pi}{l} K\,(b_1^k Q_a^k - a_1^k Q_b^k), \quad f_{31}^k &= \frac{2\pi}{l} K\,(b_2^k Q_a^k - a_2^k Q_b^k), \\ f_{12}^k &= \frac{2\pi}{l} K\,(b_3^k Q_a^k - a_3^k Q_b^k). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die zum kanonischen System gehörigen Feldgleichungen (von denen eine in (7) explizit aufgeschrieben ist) folgen nun aus der quantenmechanischen Regel für gemischte $q + c$-Zahlengrößen: $(q + \dot{c}) = \frac{i}{\hbar}[H, q] + \dot{c}$, wenn sie auf f^k_{01}, f^k_{02}, f^k_{03} angewendet wird.

Im reinen Strahlungsfeld lautet der Hamilton-Operator

$$H^k_{\mathrm{Str}} = \tfrac{1}{2}(P^{k2}_a + 4\pi^2 \nu^{k2} Q^2_a) + \tfrac{1}{2}(P^{k2}_b + 4\pi^2 \nu^{k2} Q^{k2}_b). \tag{26}$$

Beiläufig sei bemerkt, daß der Versuch, die unendliche Nullpunktenergie der Strahlung durch Kunstgriffe zu eliminieren, als nicht sachgemäß bezeichnet werden muß, solange man sie aus dem rein mechanischen Problem der schwingenden Saite nicht vertreiben kann.

Die Energie des Strahlungsfeldes $\frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, dV$ ergibt sich in der Form $\sum_k E_k$ mit

$$E^k = \tfrac{1}{2} c^2 (f^{k2}_{01} + f^{k2}_{02} + f^{k2}_{03} + f^{k2}_{23} + f^{k2}_{31} + f^{k2}_{12}).$$

Aus (24), (25) folgt $E^k = H^k_{\mathrm{Str}}$. Die Hamilton-Funktion hat dann die Bedeutung der Energie, wie es in einer reinen Feldtheorie, in der keine vorgegebenen s_0, s_1, s_2, s_3 Größen auftreten, zu fordern ist.

Die V. R. für die Feldstärken sind die bekannten. Man erhält z. B.

$$\left.\begin{aligned}
[f^k_{01}, f^k_{23}] &= \frac{2\pi K}{lc}(a^k_1 b^k_1 - a^k_1 b^k_1)\frac{\hbar}{i} = 0,\\
[f^k_{01}, f^k_{31}] &= \frac{2\pi K}{lc}(a^k_1 b^k_2 - a^k_2 b^k_1)\frac{\hbar}{i} = \frac{2\pi}{l} k_3 \frac{\hbar}{ic},\\
[f^k_{01}, f^k_{12}] &= \frac{2\pi K}{lc}(a^k_1 b^k_3 - a^k_3 b^k_1)\frac{\hbar}{i} = -\frac{2\pi}{l} k_2 \frac{\hbar}{ic}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Wohl aber sind die V. R. für die f und q-Größen ganz andere, als in jenen Theorien, die die Hamilton-Funktion aus der ursprünglichen Lagrangefunktion herzuleiten trachten. Statt $[f^k_{0r}, q^k_s] = \frac{\hbar}{ic}\delta_{rs}$ gilt hier nach (19) und (24) für die transversalen q^k_s

$$[f^k_{0r}, q^k_s] = \frac{\hbar}{ic}\left(\delta_{rs} - \frac{k_r k_s}{K^2}\right). \tag{28}$$

Es werde nun der Fall betrachtet, daß im Felde nur Punktladungen $e_1, e_2, \ldots, e_\lambda, \ldots$ vorhanden sind. Die Lage von e_λ wird durch die Koordinaten

$x_\lambda^1(t)$, $x_\lambda^2(t)$, $x_\lambda^3(t)$ beschrieben. Dann wird $\int s_0 \, \mathrm{d}V = -\sum_\lambda e_\lambda$. Multipliziert man die Gleichung

$$s_0 = C \sum_k s_0^k \cos \Gamma_k$$

mit $\cos \Gamma_k$ und integriert über V, so erhält man

$$\int s_0 \cos \Gamma_k \, dV = \tfrac{1}{2} \, C V \, s_0^k,$$

woraus

$$s_0^k = -\frac{2}{CV} \sum_\lambda e_\lambda \cos \Gamma_{k\lambda}. \tag{29}$$

Hier bedeutet $\Gamma_{k\lambda}$, daß die Raumkoordinaten in Γ_k an der Stelle x_λ^1, x_λ^2, x_λ^3 zu nehmen sind. Auf gleiche Weise berechnet man

$$s_i^k = \frac{2}{CV} \sum_\lambda e_\lambda \frac{\dot{x}_\lambda^i}{c} \sin \Gamma_{k\lambda}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{30}$$

Nach dieser Vorbereitung kann kurz die Parallele gezogen werden zwischen dem bisher üblichen und unserem Verfahren zur Gewinnung des Hamilton-Operators der Elektrodynamik.

Durch die Gleichung $\mathrm{div}_4 \, q = 0$ wurde bekanntlich bisher eine Hamilton-Funktion erzwungen für das q_0-Feld und das Feld des longitudinalen Vektorpotentials q_{long}. Sie mögen hier mit H_{q_0} und $H_{q_{\mathrm{long}}}$ bezeichnet werden. Dazu tritt H_{Str} für das Feld des transversalen Vektorpotentials. Diese drei Hamilton-Funktionen werden nun zum Diracschen Hamilton-Operator, der über alle geladenen Teilchen aufsummiert wird ($\sum_\lambda H_\lambda^D$), hinzuaddiert. $\sum_\lambda H_\lambda^D$ gibt das Mehrkörperproblem ohne Wechselwirkung der Teilchen, H_{q_0}, $H_{q_{\mathrm{long}}}$ und H_{Str} vermitteln diese. Aus einem Teil dieser Mischung schlägt sich das Coulomb-Potential nieder und durch eine nachfolgende Transformation kann erreicht werden, daß das q_0- und q_{long}-Feld, nachdem es solcherart seine Schuldigkeit getan, aus dem Hamilton-Operator wieder verschwindet. Als Ballast verbleibt die Lorentzsche Bedingungsgleichung.

Unser Verfahren besteht im folgendem. Für das q_{long}-Feld setzen wir statt eines $H_{q_{\mathrm{long}}}$ einfach $q_{\mathrm{long}} = 0$. Denn es tritt überall als Gradientenfeld auf und das Nullsetzen dieses bedeutet wegen der Eichinvarianz der

Feld- und Wellengleichungen keine Beschränkung der Allgemeinheit. Ist aber $\varrho^k = 0$, so folgt aus (23) für den Fall von Punktladungen

$$\begin{aligned} q_0 &= -\frac{2l^2}{\pi V}\sum_k \frac{1}{K^2}\left(\sum_\lambda e_\lambda \cos \Gamma_{k\lambda}\right)\cos \Gamma_k \\ &= -\frac{2c^2}{\pi V}\sum_k \frac{1}{\nu^{k2}}\sum_\lambda e_\lambda \cos \Gamma_{k\lambda}\cos \Gamma_k = -\sum_\lambda \frac{e_\lambda}{r_\lambda}, \end{aligned} \tag{31}$$

mit $r_\lambda = \sqrt{(x^1 - x_\lambda^1)^2 + (x^2 - x_\lambda^2)^2 + (x^3 - x_\lambda^3)^2}$. (Ein Hinweis auf die Art der Errechnung dieses Resultates findet sich z. B. bei E. Fermi, l. c.).

Diese explizite Form von q_0 ersetzt H_{q_0}, denn sie erlaubt, die q_0-Wechselwirkung der Teilchengemeinschaft in der Form $\frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu}\frac{e_\lambda e_\mu}{r_{\lambda\mu}}$ hinzuschreiben. Die Aufsummierung des Diracschen Operators erfolgt daher nur für das Vektorpotential (und das Massenglied). Hinzu tritt H_{Str}. Die Potentialkomponenten sind gemäß unserer ersten Annahme durch (19) mit $\varrho^k = 0$ zu ersetzen. Man erhält dann den Hamilton-Operator der Elektrodynamik ohne Transformation sofort in seiner endgültigen Form

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu}\frac{e_\lambda e_\mu}{r_{\lambda\mu}} &- c\sum_\lambda (\gamma_\lambda, p_\lambda) - \sum_\lambda m_\lambda c^2 \delta_\lambda \\ &+ \sum_\lambda e_\lambda C \sum_k (\gamma_\lambda,\ a^k Q_a^k + b^k Q_b^k)\sin \Gamma_{k\lambda} \\ &+ \sum_k \frac{1}{2}\left[P_a^{k2} + P_b^{k2} + 4\pi^2 \nu^{k2}(Q_a^{k2} + Q_b^{k2})\right], \end{aligned} \tag{32}$$

die zu denselben kanonischen Feldgleichungen führt wie (21) und genau mit der Gestalt des Fermischen Hamilton-Operators übereinstimmt.

Die Lorentzsche Zusatzbedingung mit ihren unangenehmen quantentheoretischen Folgen entfällt jetzt vollkommen.

Der gerade Weg der Ableitung beruht ausschließlich auf der neuen Art, das elektromagnetische Feld zu quanteln. Die Quantelung wird als Kern der vorliegenden Ausführungen betrachtet und wird künftigen Feldtheorien vielleicht noch gute Dienste leisten.

(Aus dem Physikalischen Institut der Universität Graz.)

Über Beobachtungen an kleinen Flüssigkeitströpfchen.

Von **E. Rumpf** und **E. Geigl.**

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 12. September 1938.)

Die Radien kleinster Tröpfchen aus reinem Wasser und verschiedenen Lösungen werden im feuchten Luftstrom mit einer geeigneten Apparatur gemessen und von der Konzentration abhängig gefunden. Das Gesetz dieser Abhängigkeit wird untersucht. Anschließend wird über Unterkühlungsversuche an schwebenden Wassertröpfchen berichtet.

Einleitung. Die Beständigkeit kleiner Tröpfchen (Nebel) wird dadurch erklärt, daß der Erhöhung des Dampfdruckes durch die Kapillarkraft der Wölbung das Gleichgewicht gehalten wird von der Erniedrigung des Dampfdruckes durch die Konzentration der Flüssigkeit, welche dadurch entsteht, daß die Kondensation an Kernen stattfindet. Hilding-Köhler[1]) gründete auf diese Hypothese eine Untersuchung des Salzgehaltes von Nebeltröpfchen. Trotzdem scheint die Ansicht nicht ganz von der Hand zu weisen zu sein, daß auch die hygroskopischen Eigenschaften der gelösten Salze eine Rolle spielen.

Hier Klarheit zu schaffen ist der Zweck dieser Arbeit. Mit einem Zerstäuber wurden Tröpfchen verschiedener Lösungen erzeugt und die Tröpfchenradien nach der Stokesschen Fallformel bestimmt. Um das Verhalten der Tröpfchen — ihr Verdunsten bzw. Anwachsen — in feuchter Luft studieren zu können, wurden sie durch einen aufsteigenden Luftstrom vor einem Mikroskop in Schwebe gehalten.

1. Die Gleichgewichtströpfchen. Das eben genannte Gleichgewicht gestattet die Gleichung:

$$\frac{2\alpha}{r\varrho}\,\frac{M}{RT}\,p_0 = n\,p_0\ ^{2})$$

aufzustellen. Hier bedeutet r den Tröpfchenradius, p_0 den Dampfdruck über einer ebenen Oberfläche, ϱ die Dichte der Lösung, α die Kapillar-

---

[1]) Hilding Köhler, Geofys. Publ. Zur Kondensation des Wasserdampfes in der Atmosphäre. S. 14. — [2]) Links: Dampfdruckerhöhung durch Kapillarkraft (Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, 11. Aufl., Bd. 3/1); rechts: Dampfdruckerniedrigung durch Konzentration (Chwolson, Lehrbuch der Physik, Bd. 3, 1905).

konstante, M das Molekulargewicht des Lösungsmittels, R die Gaskonstante, T die abs. Temperatur, $n = \frac{n_s (1 + \delta)}{n_s + n_f}$ die Konzentration (n_s Grammoleküle gelöste Substanz auf n_f Grammoleküle Lösungsmittel, δ den Dissoziationsgrad).

So erhält man

$$r = \frac{2\alpha}{n\varrho} \cdot \frac{M}{RT},$$

die Radien der „Gleichgewichtströpfchen", die bei vorgegebenen Bedingungen (α, n, ϱ, M, T und 100% Feuchtigkeit) beständig sind. Betrachten wir ein für eine bestimmte Konzentration zu $\frac{\text{großes}}{\text{kleines}}$ Tröpfchen, so muß dieses $\frac{\text{verdunsten}}{\text{anwachsen}}$, bis Konzentration und Radius erreicht sind, die dem Gleichgewicht entsprechen; bei dieser Betrachtung kann ϱ und δ weitgehend als konstant angesehen werden, wenn es sich, wie im folgenden, um verdünnte Lösungen handelt. Solche Größenänderungen konnten mit der später zu beschreibenden Apparatur tatsächlich beobachtet werden.

An dieser Stelle sei noch auf eine scheinbar paradoxe Konsequenz hingewiesen: Erzeugt man durch einen Zerstäuber Tröpfchen mit verschiedenen Lösungen, so sind die Gleichgewichtströpfchen um so $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$, je $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ die Konzentration n der zerstäubten Lösung ist.

Das ist kein Widerspruch zum Vorhergehenden, sondern ergibt sich daraus, daß die Konzentration, die sich im Gleichgewichtströpfchen einstellt, nicht mehr dieselbe ist wie in der zerstäubten Lösung, sondern durch das $\frac{\text{Schrumpfen}}{\text{Anwachsen}}$ des zu $\frac{\text{großen}}{\text{kleinen}}$ Tröpfchens $\frac{\text{vergrößert}}{\text{vermindert}}$ wird.

2. *Das Beobachtungskästchen.* Nach mehreren Versuchen hat sich schließlich das in Fig. 1a gezeichnete „Kästchen" als geeigneter Beobachtungsraum erwiesen; vier Glasplättchen (Schnittzeichnung 1b) waren mit Kanabalsam in einem Trägergestell zusammengekittet. So entstand ein ringsum von Glaswänden begrenzter Hohlraum mit quadratischem Querschnitt (5×5 mm^2) und 8 mm Höhe. In Grund- und Deckplatte des Trägergestelles mündeten Vierkantrohre vom selben Querschnitt; es war Vorsorge getroffen, daß der Übergang Messing—Glas—Messing des Strömungskanales glatt und stufenlos verlief.

Ein rechteckiger Querschnitt mußte für den Strömungskanal leider aus optischen Gründen gewählt werden; für die Strömungsverteilung wäre

ein zylindischer Kanal freilich günstiger gewesen; jedoch hatten Vorversuche gezeigt, daß zylindrische Röhren beim Übergang in ein Kästchen mit ebenen Fenstern lästige Wirbel erzeugen.

Durch das vordere der vier Fenster blickte das schwach vergrößernde Mikroskop. Die beiden seitlichen Fenster wurden zur Beleuchtung verwendet: rechts und links befand sich je ein 12 Watt-Lämpchen, dessen vertikale Glühspirale mit einfachen Linsen in der Mitte des Kästchens abgebildet wurde (Bildgröße etwa 7 mm); die Wärmestrahlen sollten durch dicke Glasplatten abgehalten werden. Das hintere Fenster war mit samtschwarzem Papier zur Herstellung eines Dunkelfeldes verschlossen.

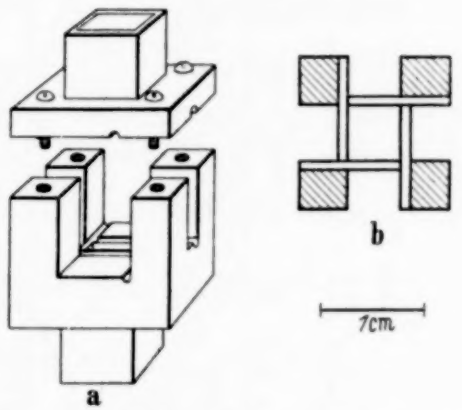


Fig. 1. Das Beobachtungskästchen aus Messing: a) perspektivisch mit abgehobener Deckplatte, b) im Schnitt mit eingekitteten Glasplatten.

Über dem oberen, ungefähr 15 cm langen Vierkantrohr wurde mittels eines Zerstäubers die zu untersuchende Lösung zerstäubt; aus der Tröpfchenwolke fielen Teile in das Kästchen und konnten dort vom eingeschalteten Luftstrom, der durch das untere ebenso lange Vierkantrohr einströmte, aufgefangen und in Schwebe gehalten werden.

3. Der Windweg. Der Luftstrom wurde einem großen Gasometer von konstantem Druck entnommen. Von dort strömte die Luft durch einen Stellhahn (eingefeilte Rille im Küken) durch zwei Windmesser *A* und *B* gleicher Bauart, aber verschiedener Empfindlichkeit. In jedem dieser Windmesser wurde der Luftstrom durch eine Düse seitlich gegen eine an einem Torsionsfaden aufgehängte Aluminiumfolie geblasen. Die Ablesung erfolgte mit Spiegel, Fernrohr und Skale. Von hier gelangte die Luft über eine Schlauchverbindung zum Beobachtungskästchen und wurde knapp vorher durch ein nasses Läppchen feucht gehalten.

4. Eichung der Windmesser und Korrekturen. Zur Eichung der Windmesser wurde der Verbindungsschlauch vom Stellhahn gelöst und an eine Eichanordnung angeschlossen. So war Vorsorge getroffen, daß der Widerstand des Luftweges bei Eichung und Messung derselbe war.

In der Eichanordnung wurde ein bekannter Luftstrom dadurch erzeugt, daß aus einer zylindrischen Maßflasche Luft mittels Wasser verdrängt wurde, wobei zur Regelung das einfließende Wasser — nicht die widerstandslos abströmende Luft — gedrosselt wurde.

Es ergaben sich die Eichkurven Fig. 2 für Windmesser A und für Windmesser B, der bei großen Ausschlägen allerdings etwas größere Streuungen aufweist als Windmesser A.

Die Ablesungen an den Windmessern bedürfen wegen der laminaren Verteilung der Strömung am Beobachtungsort einer Korrektur; sie geben

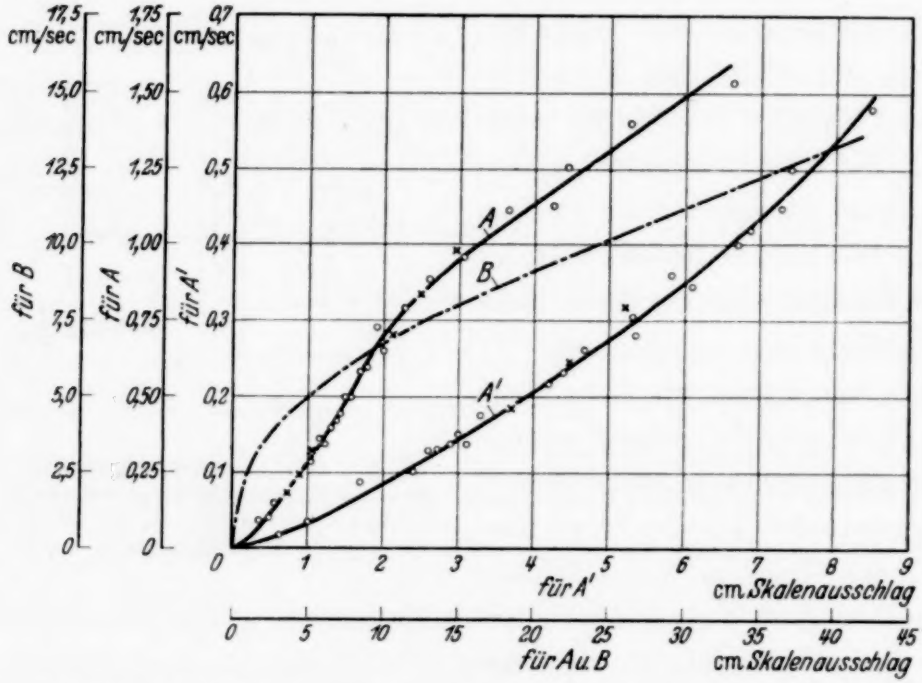


Fig. 2. Eichung der Windmesser A und B; Ordinaten: Windgeschwindigkeiten in cm/sec, berechnet aus Luftverdrängung durch Wasser; A' unterstes Stück der Kurve A in vergrößerten Maßstäben: + Nacheichung zwei Monate nach o; unempfindlicherer Windmesser B ohne Beobachtungspunkte.

ja nur eine mittlere Geschwindigkeit wieder, die nicht mit der Windgeschwindigkeit, der das beobachtete Tröpfchen ausgesetzt ist, übereinstimmt. Bei zylindrischem Querschnitt und großer (laminarer) Geschwindigkeit wäre in der Zylinderachse die Geschwindigkeit doppelt so groß als die mittlere.

Infolge des gewählten quadratischen Kästchenquerschnittes erscheint nun aber eine Berechnung der Korrektur übermäßig kompliziert, weshalb die Korrektionsfaktoren experimentell ermittelt wurden, und zwar für große und kleine Geschwindigkeiten nach verschiedenen Methoden, die einander ergänzen:

Ein Gleichgewichtströpfchen wurde nach Ablesung der zugehörigen Geschwindigkeit c am Windmesser an den oberen Rand des Gesichtsfeldes gebracht; dann der Wind plötzlich abgestellt, worauf das Tröpfchen durch das Gesichtsfeld (4 mm) fiel. Die Fallzeit wurde mit der Stoppuhr gemessen und so die Fallgeschwindigkeit c' mit c verglichen.

Radiusberechnungen (r') von Tröpfchen nach der Stokesschen Fallformel aus Windmessungen sind also mit $\sqrt{\frac{c'}{c}} = k$ zu multiplizieren:

$$r = r' k = \sqrt{\frac{q \eta c}{2 (\varrho - \sigma) g}} \cdot \sqrt{\frac{c'}{c}}.$$

(η Viskosität der Luft: 0,0017 cm^{-1} g/sec^{-1}; σ = Dichte der Luft wird gegen ϱ vernachlässigt; g = 981 cm/sec^{-2}).

Diese Methode versagt jedoch bei großen Geschwindigkeiten (großen Tröpfchen), weil die Fallzeiten durch das Gesichtsfeld zu klein werden. Gerade große Tröpfchen lassen sich aber unmittelbar an einem Okularmikrometer noch gut ausmessen. Vergleicht man diese Messungen mit den aus den Windmesserablesungen berechneten Stokesschen Radien r', so erhält man wieder Werte für k.

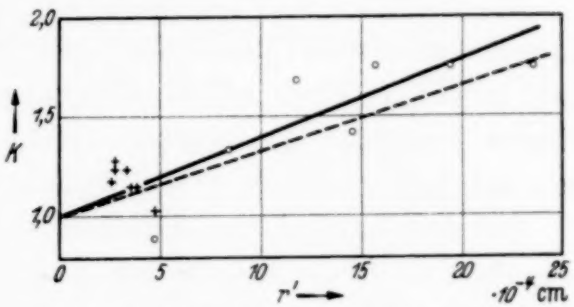


Fig. 3. Mit dem Korrekturfaktor k (gestrichelte Gerade) sind die aus den Windmesserbeobachtungen berechneten Tröpfchenradien r' zu multiplizieren; + aus Fallzeiten berechnet, o mittels Okularmikrometer.

Die nach diesen beiden Methoden bestimmten Radienkorrekturen k sind in Fig. 3 über den korrekturlos berechneten Stokesschen Radien r' eingetragen, und zwar die aus den Fallzeiten mit Kreuzchen, die mittels Okularmikrometer bestimmten mit Ringelchen. Die Werte schließen sich mit allerdings nicht unbeträchtlichen Abweichungen der ausgezogenen Geraden an, die selbstverständlich durch den Nullpunkt gehen muß. Für die Ausrechnung der folgenden Beobachtungen haben wir jedoch willkürlich die etwas tiefer liegende gestrichelte Gerade benutzt und glauben damit dem Umstand Rechnung getragen zu haben, daß zur Bestimmung von k möglichst axial gelegene Tröpfchen, für die folgenden Beobachtungen aber auch seitliche Tröpfchen benutzt wurden.

5. Beobachtungstechnik. Ehe auf die eigentlichen Messungen eingegangen wird, möge einiges über die Beobachtungstechnik gesagt und einige zum Teil ungeklärte Beobachtungen erwähnt werden.

Eine vom Zerstäuber erzeugte Tröpfchenwolke besteht sicher aus Tröpfchen verschiedenster Größe; anscheinend aber einer häufigsten Größe, was nicht nur aus späteren Versuchen sich ergeben wird, sondern schon

auch daraus hervorgeht, daß eine solche Wolke sich erfahrungsgemäß einige Zeit hält.

Davon gelangt ein Teil in das Kästchen. Nachdem die größten Tröpfchen durch das Gesichtsfeld des Mikroskops rasch hindurchgefallen sind, kommen die kleineren nach. Durch geschicktes Öffnen des Stellhahnes gelingt es mit einiger Übung leicht, eine ganze Anzahl Tröpfchen ähnlicher Größe mit geringer Relativbewegung im Gesichtsfeld zu halten. Man wird sich nun im allgemeinen für ein bestimmtes Tröpfchen entscheiden müssen und auf dieses den Aufwind einstellen. Meist verschwinden dabei die anderen nach oben und unten aus dem Gesichtsfeld, und es gelingt, das einzelne Tröpfchen in ruhiger Schwebe minuten-, ja viertelstundenlang vor dem Mikroskop zu halten.

Am Stellhahn läßt sich dabei die Änderung der Tröpfchengröße fortlaufend beobachten. Meist wird es ein Verdunsten sein; anfangs langsam, dann immer rascher[1]), bis die Gleichgewichtsgröße erreicht ist, was daran erkannt wird, daß der Stellhahn nicht mehr nachgedreht werden muß. Nun hat man Gelegenheit, die Windmesser abzulesen.

Bei der verwendeten optischen Anordnung erschienen die größeren Tröpfchen noch als Kugeln mit zwei Lichtpunkten (rechts und links). Tröpfchen aus reinem Wasser zum Beispiel verdunsteten aber so weit, daß sie gerade noch als schwachleuchtende Punkte im Dunkelfeld sichtbar blieben.

Der geschilderte Idealfall des „Tröpfchenfangs" ist aber durchaus nicht die Regel, weil die Tröpfchen eine ganz eigentümliche gegenseitige Beeinflussung zeigen. Wenn nämlich nicht nur ein, sondern zwei Tröpfchen im Gesichtsfeld zurückbleiben, so machen sich — wahrscheinlich! — hydrodynamische Kräfte bemerkbar, die überraschende gegenseitige Bewegungen zur Folge haben. Es würde zu weit führen, alle die vorkommenden wunderschönen Fälle zu beschreiben. Öfters wurden „Schwingungen" (bis zu ungefähr 20!) zweier Tröpfchen um den gemeinsamen Schwerpunkt beobachtet. Eine Vereinigung zweier Tröpfchen konnte nie festgestellt werden, hingegen einmal ein Tröpfchenzwilling.

6. Beobachtungsergebnisse. Im Hinblick auf das Ziel dieser Arbeit gelangten außer reinem Wasser wässerige Lösungen verschiedener Salze und anderer Substanzen zur Untersuchung: Dissoziierende und nichtdissoziierende, hygroskopische und nichthygroskopische, organische und

[1]) In Übereinstimmung mit N. Gudris und L. Kulikowa (ZS. f. Phys. **25**, 121, 1924), nur daß hier die Verdampfung rascher erfolgt — wohl wegen der bewegten Luft.

anorganische, solche mit großen und mit kleinen Molekülen. Von jeder Lösung wurden verschiedene Konzentrationen hergestellt und von jeder Konzentration 50 Gleichgewichtströpfchen gemessen.

Als Vergleichsmessung diente eine 0,5%ige $MgCl_2$-Lösung; Tröpfchen dieser Lösung wurden immer wieder betrachtet, um das einwandfreie Arbeiten der Windmesser usw. festzustellen.

a) Freilich sind die Abweichungen der Tröpfchengrößen einer Meßserie untereinander ziemlich groß; durch die große Zahl von 50 Messungen je Lösung ließ sich aber doch eine ausreichende Genauigkeit erzielen, wie die Tabelle 1 zeigt.

Tabelle 1. Mittelwerte der nach Abschnitt 4 korrigierten Tröpfchenradien r aus je 50 Tröpfchen; 0,1 bis 10% $MgCl_2$; *Em* mittlerer Fehler der Einzelmessung, *Mw* des Mittelwertes.

%	$r \cdot 10^4$ cm	$Em \cdot 10^4$ cm	$Mw \cdot 10^4$ cm
0,1	4,065	0,604	0,083
0,2	6,010	0,646	0,091
0,5	8,364	0,805	0,114
1,0 [1]	12,53	2,34	0,35
	(13,84)	(4,55)	(0,64)
10	27,30	2,83	0,40

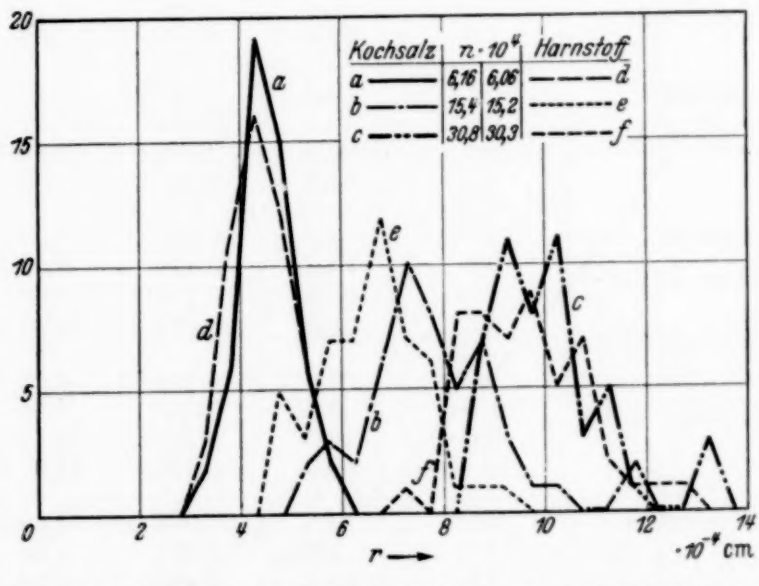


Fig. 4. Häufigkeit (Ordinate) des Tröpfchenradius r unter 50 Tröpfchen; wässrige Kochsalz- und Harnstofflösungen der Konzentration n.

[1]) Bei dieser Konzentration wurden nur 45 Tröpfchen verwendet; fünf Messungen lieferten ganz abweichende Radien (24,8 bis $26,5 \cdot 10^{-4}$ cm); bezieht man diese in die Rechnung ein, so ergeben sich die eingeklammerten Zahlen, die sich nicht nur in diese Tabelle nicht einfügen, sondern auch aus der Kurve Fig. 6 stark herausfallen.

b) Ein anschaulicheres Bild von der Beobachtungsgenauigkeit ist vielleicht durch die graphische Häufigkeitsdarstellung zu gewinnen. Als Beispiel seien die Häufigkeitskurven von Kochsalz und Harnstoff (Fig. 4) und von Rohr- und Traubenzucker (Fig. 5) angeführt. In dieser Darstellung wurden die beobachteten Tröpfchenradien in Intervalle von $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ cm eingeteilt und abgezählt, wieviele Tröpfchen den einzelnen Intervallen zugehören. Diese Zahlen sind über dem Intervallmittel als Ordinaten aufgetragen.

c) In Tabelle 2 sind endlich die Ergebnisse von Messungen an acht Lösungen (1495 Tröpfchen) zusammengefaßt.

Tabelle 2. Zusammenhang zwischen Konzentration $n = \frac{n_s(1+\delta)}{n_s + n_f}$, Dissoziationsgrad δ und Tröpfchenradius r (Mittel aus je 50 Tröpfchen von acht Lösungen verschiedenen Prozentgehaltes); r_0 siehe Abschnitt 7c.

Nr.	Gelöste Substanz	%	$n \cdot 10^4$	$\sqrt[3]{n}$	$r \cdot 10^4$	$r_0 \cdot 10^4$
1	Magnesiumchlorid $MgCl_2$, ($\delta = 1$)	0,1	3,8	0,072	4,07	36
		0,2	7,6	0,091	6,01	38
		0,5	19,0	0,124	8,36	34
		1,0	38	0,156	12,53	35
		10	420	0,348	27,3 *	27,3
2	Kaliumchlorid KCl, ($\delta = 1$)	0,1	4,8	0,078	4,64	31
		0,5	24,2	0,135	10,77	32
		1,0	48,4	0,169	15,02	31
3	Kochsalz NaCl, ($\delta = 1$)	0,1	6,2	0,085	4,45	32
		0,25	15,4	0,116	7,77	34
		0,5	30,8	0,146	10,12	33
		1,0	61,6	0,183	15,50	34
4	Harnstoff $CO(NH_2)_2$, ($\delta = 0$)	0,2	6,1	0,085	4,32	32
		0,5	15,2	0,115	6,53	30
		1,0	30,3	0,145	9,60	32
		2,0	61,8	0,184	21,67 *	43
5	Rohrzucker $C_{12}H_{24}O_{12}$, ($\delta = 0$)	0,5	2,5	0,064	4,12	40
		1,0	5,05	0,081	5,85	41
		2,0	10,3	0,102	9,27	44
		10	55,5	0,177	27,9 *	53
6	Traubenzucker $C_6H_{12}O_6$, ($\delta = 0$)	0,25	2,5	0,064	4,59	36
		0,5	5,05	0,081	6,62	44
		1,0	10,3	0,102	9,05	43
7	Rotes Blutlaugensalz $K_3[Fe(CN)_6]$, ($\delta = 1$)	0,2	2,2	0,060	4,88	48
		1,0	11,0	0,103	9,54	44
		5,0	57,7	0,179	24,05 *	48
8	Zitronensäure $C_6H_8O_7$, ($\delta = 0$)	0,5	4,7	0,078	7,21	49
		1,0	9,4	0,098	8,31	43
		2,5	24,0	0,134	12,46	41
		5,0	49,3	0,170	24,05 *	48

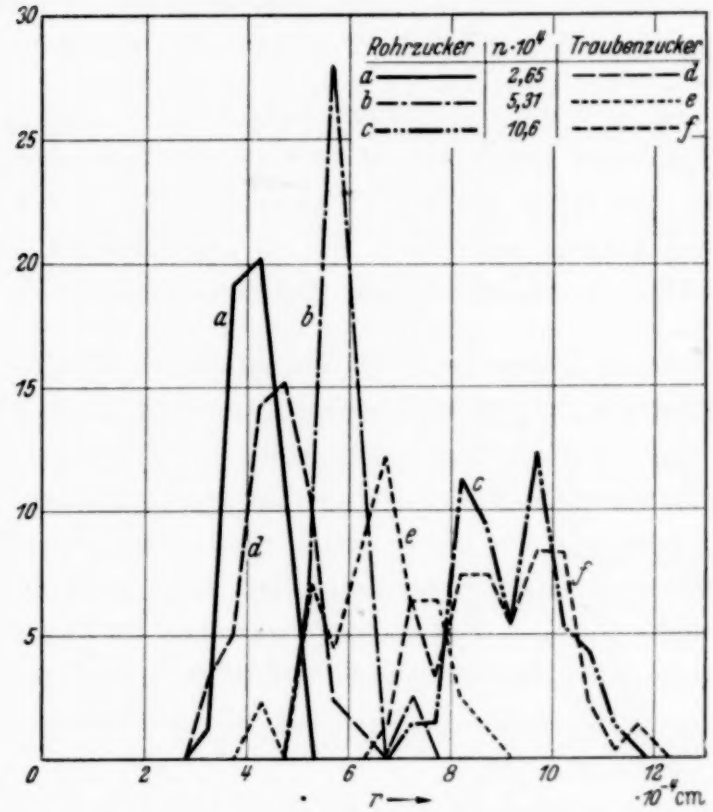


Fig. 5. Häufigkeit (Ordinate) des Tröpfchenradius r unter 50 Tröpfchen; wässrige Rohr- und Traubenzuckerlösungen der Konzentration n.

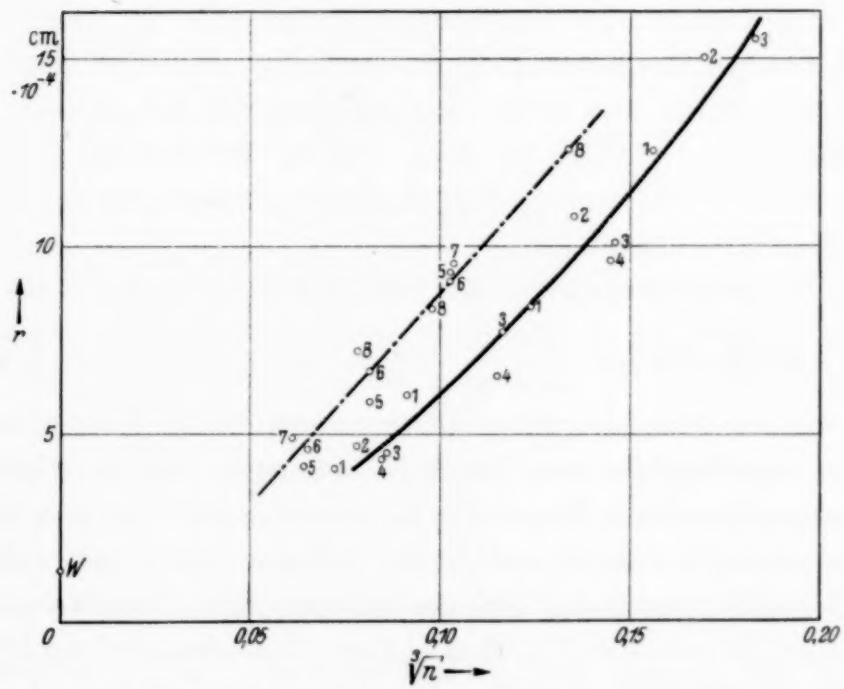


Fig. 6. Abhängigkeit der mittleren Tröpfchenradien r von der Konzentration (n); 8 Lösungen: 1 bis 4 kleine Moleküle, 5 bis 8 große Moleküle; W destilliertes Wasser.

Dieselben Messungen sind in Fig. 6 wiedergegeben, wo die Ziffern 1 bis 8 der Lösungsnummer von Tabelle 2 entsprechen; zu dieser graphischen Darstellung schien sich die Gegenüberstellung von $\sqrt[3]{n}$ und r zu eignen. Nicht in das Diagramm aufgenommen sind die mit Sternchen versehenen Tröpfchenradien. Sie fallen aus dem Schaubild heraus und weichen auch vom allgemeinen Verlauf ab. Nur die 10%ige $MgCl_2$-Lösung könnte sich der Fortsetzung der ausgezogenen Kurve anschließen.

7. *Besprechung der Ergebnisse.* a) Die Erfahrung bei den Beobachtungen, für die einige Beispiele im vorigen Abschnitt angeführt sind, lehrt, daß die Abweichungen der Einzelbeobachtungen vom Mittelwert der berechneten Radien mit der Radiengröße stark ansteigt. Das geht nicht nur aus Tabelle 1 hervor, sondern auch aus den Fig. 4 und 5, wo die Breite der Häufigkeitskurven mit zunehmenden Radien stark zunimmt. Bei hohen Konzentrationen (großen Tröpfchen) kommen Unterschiede zwischen den Einzelmessungen um das Dreifache vor: die Mittelwerte fallen dann aus dem Schaubild Fig. 6 stark heraus (Sternchen in Tabelle 2 — verhältnismäßig zu große Radien außer 10%iger $MgCl_2$).

b) Sieht man von diesen „Außenseitern" ab, so zeigt der Zusammenhang zwischen Tröpfchengröße und Konzentration schöne Regelmäßigkeit. Die Radien r sind abhängig von n, r nimmt mit n zu. Das geht aus den Häufigkeitskurven deutlich hervor, wofür Fig. 4 und 5 Beispiele sind, besonders aber auch aus der Fig. 6, wo die Substanzen mit kleinen Molekülen (Nr. 1 bis 4), gleichgültig, ob sie dissoziiert sind oder nicht (Nr. 3 und 4), hygroskopisch oder nicht (Nr. 1 und 3), sich gut zu einer Kurve zusammenschließen. Auffällig ist aber, daß die Substanzen mit großen Molekülen (Nr. 5 bis 8) zu große Tröpfchenradien liefern, die sich zu einer zweiten Kurve zusammenfinden.

Es sei in Erinnerung gebracht (Abschnitt 1), daß die in Rechnung gesetzten Konzentrationen $n = \frac{n_s}{n_f}(1 + \delta)$ der eingewogenen Lösungen nicht den in den Gleichgewichtströpfchen vorhandenen Konzentrationen entsprechen, also die hier zum Ausdruck gebrachte Gesetzmäßigkeit der in Abschnitt 1 aufgestellten Formel durchaus nicht zu widersprechen braucht.

c) Um diese Beziehung zu prüfen, müssen Tröpfchen verwendet werden, die ihre Konzentration nach der Zerstäubung beibehalten und nicht durch Verdunsten bzw. Kondensation ändern. Dies schien bei der 10%igen $MgCl_2$-Lösung der Fall zu sein. Hier konnte im Kästchen keine Änderung der Tröpfchengröße beobachtet werden. Freilich bleibt ungewiß, welche

Größenänderungen auf dem Fallwege bis zum Beobachtungsort eingetreten sind.

Setzt man in die obige Beziehung die für diese 10% ige $MgCl_2$-Lösung gültigen Zahlwerte ein ($n = 3{,}8 \cdot 10^{-2}$, $\varrho = 1{,}08$, $M = 18$, $R = 8{,}3 \cdot 10^7$, $T = 293$, $\alpha \sim 73$), so erhält man

$$r = 26 \cdot 10^{-7} \text{ cm},$$

also einen ungefähr tausendmal zu kleinen Radius.

Aus unseren Beobachtungen muß demnach geschlossen werden, daß die in Rede stehende Beziehung zwischen Tröpfchenradius und Konzentration quantitativ nicht richtig ist und daß daher auch Folgerungen, die von anderer Seite daraus auf die Konzentration der Nebeltröpfchen gezogen wurden, nicht stichhaltig sind.

d) Qualitativ scheint der Ausdruck die Beobachtungen aber gut wiederzugeben. Für die verwendeten Konzentrationen kann nämlich das Produkt $\frac{2\alpha M}{\varrho R T}$ in guter Annäherung als konstant angesehen werden. Wir wollen daher für die Tröpfchen, wie sie vom Zerstäuber erzeugt werden, $r_0 = \frac{1}{n} K$ ansetzen, und aus der 10% igen $MgCl_2$-Lösung (mit $r = 27{,}3 \cdot 10^{-4}$ und $n = 3{,}8 \cdot 10^{-2}$) $K = 104 \cdot 10^{-6}$ annehmen.

Außerdem läßt sich die Konzentration x in Gleichgewichtströpfchen aus der ursprünglichen Konzentration der vom Zerstäuber gelieferten Tröpfchen vom Radius r_0 mit $x = n \frac{r_0^3}{r^3}$ ansetzen. Nach unserer obigen Annahme ist aber $r = \frac{1}{x} K$ und daher

$$r_0 = 10^{-2} \sqrt[3]{\frac{r^2}{n} 104}.$$

Der so berechnete Anfangsradius der Zerstäubertröpfchen ist für die einzelnen Beobachtungsmittelwerte in Tabelle 2 eingefügt. Es ergibt sich, daß die Tröpfchenradien r_0 der Substanzen 1 bis 4 eine (wenn auch nicht sehr gute) Übereinstimmung mit r_0 etwas größer als $3 \cdot 10^{-3}$ cm und der Substanzen 5 bis 8 mit $r_0 = 4 - 5 \cdot 10^{-3}$ cm zeigen, woraus die Folgerung erlaubt zu sein scheint, daß die Formel qualitativ richtig angesetzt ist und nur einer quantitativen Richtigstellung bedarf. Jedoch soll nicht verschwiegen werden, daß sich aus diesen Ansätzen unwahrscheinliche Konzentrationen für die Gleichgewichtströpfchen ergeben, für die $\frac{2\alpha M}{\varrho R T}$ nicht mehr als konstant angesehen werden darf.

Zwei Größen sind es, die eine solche Richtigstellung vielleicht ermöglichen: die Kapillarkonstante muß bei kleinen Krümmungen nicht denselben Wert haben wie makroskopisch festgestellt und: die Feuchtigkeit. Ein Feuchtigkeitsdefizit unter 100%, das an sich ja wahrscheinlich ist, würde die Unstimmigkeiten der Beziehung erklären; allerdings ergibt eine rechnerische Prüfung dieser Hypothese, daß das Feuchtigkeitsdefizit vom Tröpfchenradius abhängig sein müßte. Darüber wird voraussichtlich später berichtet werden!

Hier möchten wir nur noch erwähnen, daß aus solchen Untersuchungen auf die Größe der Kondensationskerne geschlossen werden könnte. Zieht man nämlich die beobachteten Radien der „reinen" Wassertröpfchen und r_0 in Rechnung und sucht den entsprechenden Wert für die Konzentration auf den zum Nullpunkt verlängerten Kurven der Fig. 6 auf, so erhält man für die Kondensationskerne die allerdings etwas große Zahl von 10^9 bis 10^{10} Molekülen.

8. Unterkühlungsversuche. Mit der beschriebenen Apparatur war ursprünglich beabsichtigt, Unterkühlungsversuche an reinen Wassertröpfchen anzustellen. Es war ja zu erwarten, daß an frei schwebenden Wassertröpfchen sehr tiefe Unterkühlungstemperaturen erreicht werden können. Zu diesem Zweck dienten wärmeisolierende Schutzkästchen über dem Beobachtungskästchen (Abschnitt 2) und Kühlvorrichtungen für den Wind (Salz-Eis und CO_2-Schnee). Die Temperatur des Windes im Kästchen wurde mittels eines Thermoelementes ermittelt, das von oben in das Kästchen hineinragte und für die eigentlichen Tröpfchenmessungen leicht entfernbar war.

Es ließen sich mit Sicherheit Wassertröpfchen noch unter -35^0C beobachten. Tiefere Temperaturen konnten wir nicht erreichen. Dabei ergab sich eine eigentümliche Abhängigkeit der Größe der Gleichgewichtströpfchen von der Windtemperatur: bei Zimmertemperatur ($+22^0$C) Radien von 0,4 bis höchstens $1 \cdot 10^{-4}$ cm gegen 2 bis $3 \cdot 10^{-4}$ cm bei -35^0C (ungefähr 120 Einzelmessungen bei verschiedenen Temperaturen). Wir haben jedoch Bedenken, daß die Windtemperaturen, welche wir mit dem Thermoelement feststellten, auch wirklich der Wassertemperatur im Gleichgewichtströpfchen entsprechen.

Neben glasklaren und normal spiegelnden (Abschnitt 5) Kugeln ließen sich nämlich von -10^0C abwärts auch Tröpfchen feststellen, die mehr Lichtpunkte zeigten. Diese ließen sich im Gesichtsfeld selten lange in Ruhe halten, sondern rotierten. Wir glauben, daß dies Wassertröpfchen mit kleinen Eiskristallen waren, und glauben auch, in der zeitlich zu-

nehmenden Rotationsunruhe das langsame Auskristallisieren des Tröpfchens gesehen zu haben.

Ein vollständiges Auskristallisieren der Tröpfchen konnte nicht beobachtet werden, denn Eisnadeln ließen sich in unserer Apparatur nicht in Schwebe halten. Wenn aber unsere Annahme über die Zusammensetzung dieser Tröpfchen richtig ist, so spielt sich der Vorgang trotz tiefer Windtemperaturen beim Gefrierpunkt ab. Daher fürchten wir, daß trotz zeitweilig langer Beobachtungsdauer die Windtemperatur kein Maß für die Temperatur der unterkühlten Tröpfchen ist.

Für mehrere Flaschen flüssiger Kohlensäure sei der Forschungsgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft wärmstens gedankt.

Zusammenfassung.

1. Es wird eine Anordnung beschrieben, die gestattet, das Verhalten von Tröpfchen zerstäubter Lösungen zu untersuchen.

2. Es wird eine Beziehung untersucht, die gestattet, aus der Konzentration die Tröpfchengröße zu berechnen, und mit den Beobachtungen nicht in Übereinstimmung gefunden. Daher müssen auch Schlüsse, die von anderer Seite daraus auf die Konzentration und Kerne der natürlichen Nebeltröpfchen gefolgert wurden, in Zweifel gezogen werden.

3. Es wird jedoch in Übereinstimmung mit dieser Beziehung festgestellt, daß die Größe der Gleichgewichtströpfchen nur abhängig ist von der Konzentration unter Einrechnung der Dissoziation.

4. Es wird über Unterkühlungsversuche an freischwebenden reinen Wassertröpfchen berichtet.

Die optischen *L*-Spektren der Elemente Chrom bis Kobalt im extremen Ultraviolett.

Von **Folke Tyrén** in Upsala.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 22. September 1938.)

Als Fortsetzung einer früheren Arbeit wird hier eine Untersuchung der optischen *L*-Spektren der Elemente 24 Cr bis 27 Co im Gebiete 22 bis 12 Å mitgeteilt. Insgesamt sind 34 Linien identifiziert worden. Die kürzeste Wellenlänge wurde für Fe XVII zu 12,1 Å registriert und für Co XVIII wurde ein Ionisierungspotential von rund 1400 Volt berechnet.

Voriges Jahr wurde im hiesigen Institut ein neuer Konkavgitterspektrograph mit einem streifenden Winkel von 1° für Untersuchungen im ultraweichen Röntgengebiet montiert und einjustiert. Er hat sich als sehr lichtstark bis zu ganz kurzen Wellenlängen erwiesen. Mit diesem Spektrographen hat der Verfasser kürzlich eine Präzisionsbestimmung der Wellenlänge der $K\alpha_{1,2}$-Linie von Al [1]) ausgeführt. Dabei hat es sich gezeigt, daß die Erforschung der optischen *L*-Spektren[2]), die früher bei Chrom abgeschlossen wurde, bis mindestens 26 Fe weitergeführt werden konnte. Nach einigen Vorversuchen, die u. a. zeigten, daß man die größte Intensität der Elemente an der hochspannungführenden, negativen Elektrode bekommt, wurden Spektrogramme von 24 Cr bis 27 Co aufgenommen. Nickel wurde nicht untersucht, aber es scheint mir nicht unwahrscheinlich, daß das Ionisierungsvermögen des Funkens (0,5 μF, 70 kV) hinreichend ist, um eine Erregung der *L*-Schale von Elementen mit sogar noch höheren Atomnummern zu erhalten.

Tabelle 1. Optische *L*-Spektren von Chrom bis Kobalt.

Kombination	Cr XV		Mn XVI		Fe XVII		Co XVIII	
	λ (I)	ν	λ	ν	λ	ν	λ	ν
$2p\,{}^1S_0 - 3s\,{}^3P_1$	21,153 (4)	4727,5	18,935	5281,2	17,051	5864,8	15,437	6477,9
$2p\,{}^1S_0 - 3s\,{}^1P_1$	20,863 (3)	4793,2	18,654	5360,8	16,774	5961,6	15,169	6592,4
$2p\,{}^1S_0 - 3d\,{}^3P_1$	19,015 (0)	5259,0	17,095	5849,7	15,453	6471,2	14,036	7124,5
$2p\,{}^1S_0 - 3d\,{}^1P_1$	18,782 (2)	5324,2	16,882	5923,5	15,261	6552,7	13,862	7214,0
$2p\,{}^1S_0 - 3d\,{}^3D_1$	18,497 (4)	5406,3	16,616	6018,3	15,012	6661,3	13,629	7337,3
$2p\,{}^1S_0 - 3p'\,{}^3P_1$	16,965 (0)	5894,5	15,312	6530,8	13,887	7201,0	12,66	7898
$2p\,{}^1S_0 - 3p'\,{}^1P_1$	16,889 (1)	5921,0	15,238	6562,5	13,820	7235,9	12,60	7937
$2p\,{}^1S_0 - 4d\,{}^1P_1$	15,21 (0)	6576	13,61	7349	12,26	8155		
$2p\,{}^1S_0 - 4d\,{}^3D_1$	15,06 (0)	6641	13,46	7429	12,12	8250		

[1]) F. Tyrén, ZS. f. Phys. **109**, 722, 1938. — [2]) B. Edlén u. F. Tyrén, ebenda **101**, 206, 1936.

Tabelle 2.

	Cr XV			Mn XVI		
$2s^2\,2p^6\,{}^1S_0$	8172,3		I. P. 1008,1 Volt [1]	9164,3		I. P. 1130,5 Volt
Grenze:	$2s^2\,2p^5\,{}^2P_2$ (= 0) ${}^2P_1$ (− 70,1)			${}^2P_1$ (− 85,3)		
Term	ν		n^*	ν		n^*
$3s\,{}^3P_1$	3444,8	*65,7*	2,677	3883,1	*79,6*	2,690
$3s\,{}^1P_1$	3379,1		(${}^2P_1$) 2,676	3803,5		(${}^2P_1$) 2,688
$3d\,{}^3P_1$	2913,3	*65,2*	2,911	3314,6	*73,8*	2,911
$3d\,{}^1P_1$	2848,1	*82,1*	2,944	3240,8	*94,8*	2,944
$3d\,{}^3D_1$	2766,0		(${}^2P_1$) 2,951	3146,0		(${}^2P_1$) 2,949
$4d\,{}^1P_1$	1596	*65*	3,933	1816	*81*	3,933
$4d\,{}^3D_1$	1531		(${}^2P_1$) 3,927	1735		(${}^2P_1$) 3,928
Grenze:	$2s\,2p^6\,{}^2S_1$ (− 938)			${}^2S_1$ (− 999)		
$3p'\,{}^3P_1$	2277,8	*26,5*	2,771	2633,5	*31,7*	2,781
$3p'\,{}^1P_1$	2251,3		2,782	2601,8		2,793

	Fe XVII			Co XVIII		
$2s^2\,2p^6\,{}^1S_0$	10 211,7		I. P. 1259,7 Volt	11 316,4		I. P. 1396,0 Volt
Grenze:	${}^2P_1$ (− 102,1)			${}^2P_1$ (− 121,2)		
Term	ν		n^*	ν		n^*
$3s\,{}^3P_1$	4346,9	*96,8*	2,701	4838,5	*114,5*	2,711
$3s\,{}^1P_1$	4250,1		(${}^2P_1$) 2,699	4724,0		(${}^2P_1$) 2,709
$3d\,{}^3P_1$	3740,5	*81,5*	2,912	4191,9	*89,5*	2,912
$3d\,{}^1P_1$	3659,0	*108,6*	2,944	4102,4	*123,3*	2,944
$3d\,{}^3D_1$	3550,4		(${}^2P_1$) 2,947	3979,1		(${}^2P_1$) 2,945
$4d\,{}^1P_1$	2057	*95*	3,926			
$4d\,{}^3D_1$	1962		(${}^2P_1$) 3,920			
Grenze:	${}^2S_1$ (− 1063)			${}^2S_1$ (− 1129)		
$3p'\,{}^3P_1$	3010,7	*34,9*	2,790	3418,1	*38,8*	2,796
$3p'\,{}^1P_1$	2975,8		2,802	3379,3		2,808

Als geerdete Elektrode wurde ebenfalls das zur Untersuchung vorliegende Element verwendet. Ein kleines Stück davon wurde in Kupferfassung gebracht und Borsäureanhydrid durch Einschmelzen in eine Ausbohrung zugeführt. Kleine schon vorhandene Mengen von Kohlenstoff im Metall waren hinreichend, um ein schwaches Kohlenstoffspektrum zu bekommen. Auf diese Weise wurde ein Bezugssystem von Bor-, Kohlenstoff- und Sauerstofflinien erhalten. Die vier stärksten Linien jedes Spektrums

[1]) Um cm^{-1} in Volt zu übertragen, ist der Faktor $1{,}2336 \cdot 10^{-4}$ verwendet worden.

hatten auch in der zweiten Ordnung genügende Intensität, um eine genaue Messung zuzulassen. Die schwächeren Linien dagegen wurden nur in der ersten Ordnung gemessen und beanspruchen deshalb nicht dieselbe Genauigkeit wie die stärksten. Überhaupt ist es überraschend, daß man in diesem

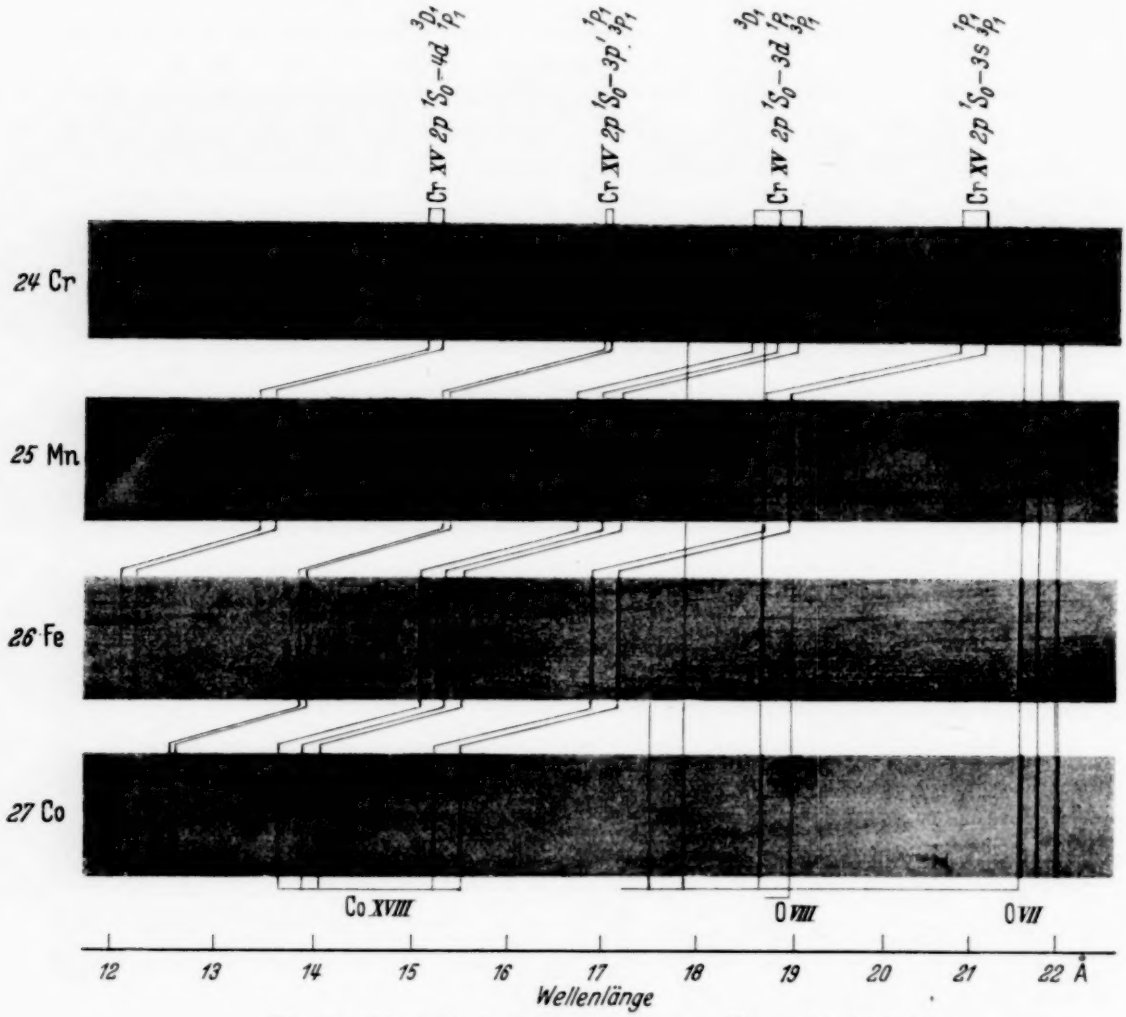


Fig. 1. Die optischen *L*-Spektren von Chrom bis Kobalt im Wellenlängengebiet 22 bis 12 Å.

Spektralgebiet so gute Intensität und Linienschärfe bekommt. Man muß ja bedenken, daß die Neigung der Strahlung gegen die Platte, die bei diesem Spektrographen längs dem Rowland-Kreis liegt, höchstens 3^0 ist.

Meßergebnisse. Von jedem der Elemente Chrom bis Kobalt wurden sieben Linien der Ne I-ähnlichen Spektren gemessen. Für zwei Linien der drei ersten Elemente wurde außerdem ein höheres Serienglied beobachtet. Bei Cr und Fe konnten auch einige schwache Linien, die zu F I-ähnlichen Spektren gehören, beobachtet werden (siehe Fig. 1). Da aber diese Spektren nur ganz fragmentarisch erhalten wurden, sind sie nicht in diese Mitteilung aufgenommen. Die identifizierten und gemessenen Linien sind

in Tabelle 1 eingetragen und in Fig. 1 zu sehen. Als Einheit der Wellenzahlen ist $10^3\,\mathrm{cm}^{-1}$ gewählt, um eine der Genauigkeit entsprechende Abkürzung zu erzielen. Für 24 Cr sind die Wellenlängenwerte etwas niedriger als in der früheren Mitteilung[1]), wo ein um 0,013 Å zu hoher Wellenlängenwert der Bezugslinie O VII λ 21,6 Å verwendet wurde. Die Identifizierung ist mit Hilfe von Tabellen, ähnlich Tabelle 3 in der früheren Arbeit, gestützt. Die Termsysteme sind berechnet (Tabelle 2) und die absoluten Termwerte durch Extrapolierung von $3\,d\,{}^3D_1$, in der isoelektronischen Reihe bestimmt worden. Die Bestimmung der Aufspaltung der Grenzterme ${}^2P_2 - {}^2P_1$ sowie ${}^2P_1 - {}^2S_1$, die dem Gesetz der regulären bzw. irregulären Dublette folgen, sind auch durch Extrapolierung erhalten.

Herrn Dozenten Bengt Edlén danke ich herzlich für wertvolle Unterstützung.

Upsala, Physikalisches Institut der Universität, im September 1938.

[1]) B. Edlén u. F. Tyrén, ZS. f. Phys. **101**, 206, 1936.

Zur Theorie der Supraleitung.

Von **A. Papapetrou** in Athen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 13. Oktober 1938.)

Die Leitungselektronen lassen sich in zwei Klassen einteilen: Die Zustände im Bereich der Abfallstelle der Fermischen Verteilungsfunktion sind durch Wellenpakete darzustellen (Klasse α). Dagegen sind alle tieferen Zustände durch Eigenfunktionen darzustellen, welche den Grenzbedingungen an der Oberfläche des Metallstückes genügen (Klasse β). Die Größe der Wellenpakete für die Darstellung der α-Zustände wird nach den Ergebnissen der Blochschen Theorie bestimmt, woraus der elektrostatische Anteil der Wechselwirkung der Elektronen folgt. Es ergibt sich eine Koppelung der α-Zustände, welche eine Unstetigkeit des Eigenwertspektrums zur Folge hat. An der Grenze der β-Klasse gibt es einen Energiesprung, welcher die Bedingung für das Eintreten von Supraleitung bildet.

1. Einleitung. Es ist schon lange die Vermutung ausgesprochen worden, daß die Supraleitung ein mit der Wechselwirkung der Leitungselektronen untereinander eng zusammenhängender Effekt ist. Es wird jetzt im folgenden gezeigt, daß sich der elektrostatische Anteil dieser Wechselwirkung durch eine Weiterbildung der Blochschen Theorie in einfacher Weise berechnen läßt, wobei sich die obenerwähnte Vermutung bestätigt: Das Eigenwertspektrum der Leitungselektronen gewinnt feinere Züge, welche sich erst bei sehr tiefen Temperaturen bemerkbar machen, und dabei zur Supraleitfähigkeit führen.

Den Ausgangspunkt dieser Rechnungen bildet die genauere Kenntnis des Verhaltens des Elektronengases im magnetischen Feld. Auf Grund einer genaueren Untersuchung dieses Problems[1]) hatte der Verfasser den Gedanken ausgesprochen, daß das Elektronengas bei nicht zu starken Feldern einen anormal starken Diamagnetismus besitzt. Der Beweis hierfür konnte aber damals nicht erbracht werden, weil das für die Rechnung zugrunde gelegte Modell — im wesentlichen ein unendlich langes Parallelepiped im transversalen Magnetfeld — das merkwürdige Verhalten zeigt, daß es bei sehr schwachen Feldern genau den bekannten schwachen Landauschen Diamagnetismus besitzt[2]). Nun konnte aber Welker in sehr einfacher Weise zeigen[3]), daß ein Zylinder im longitudinalen Magnetfeld den gesuchten anormalen Diamagnetismus besitzt, wobei sich ein makroskopischer *Larmor*-strom ergibt, welcher genau der von London in seiner phänomenologischen

[1]) A. Papapetrou, ZS. f. Phys. **106**, 9, 1937. — [2]) A. Papapetrou, ebenda **107**, 387, 1937. — [3]) H. Welker, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. **14**, 115, 1938.

Theorie der Supraleitung aufgestellten Beziehung zwischen Strom und Vektorpotential genügt. Dabei wurde die Annahme zugrunde gelegt, daß im betrachteten Elektronengas keine Übergänge zwischen verschiedenen Elektronenzuständen möglich sind.

Bekanntlich kann man aber die Verwirklichung dieser Annahme als die Haupteigenschaft des supraleitenden Zustandes ansehen. Andererseits ist leicht einzusehen, daß der anormale Diamagnetismus bei Erfüllung dieser Annahme auch für irgendeine andere Kastenform und Feldorientierung existiert[1]). Damit ist durch die Welkersche Arbeit auf elektronentheoretischem Wege der Beweis erbracht, daß der anormale Diamagnetismus eine *notwendige Eigenschaft* des supraleitenden Zustandes ausmacht. Nun gilt aber nach London auch das umgekehrte: Der supraleitende Zustand ist durch den anormalen Diamagnetismus hinreichend charakterisiert. Es folgt daraus, daß für eine Erklärung der Supraleitung der Beweis genügt, daß es eine Gesamtheit von Elektronenzuständen gibt, für welche bei genügend tiefen Temperaturen jeder Übergang zu anderen Zuständen unmöglich wird. Und dies ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

2. *Wellen und Wellenpakete.* Die Blochsche Theorie beschreibt die Eigenschaften des normalen Leiters in so befriedigender Weise, daß man sie bei irgendeinem Versuch einer Erklärung der Supraleitung wesentlich mitberücksichtigen muß[2]). In unserem Fall wird diese Forderung von selbst erfüllt, da die Blochsche Theorie den eigentlichen Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet.

Es ist zunächst folgende Bemerkung von Bedeutung: Für den normalen Leiter hat sich die Benutzung der (modulierten) ebenen Wellen gut bewährt;

---

[1]) Das vom Verfasser angegebene Ergebnis über das Verhalten eines unendlich langen Parallelepipeds in einem sehr schwachen transversalen Feld (ZS. f. Phys. **107**, 387, 1937) ist ebenfalls unter der Annahme abgeleitet, daß es keine Übergänge zwischen verschiedenen Elektronenzuständen gibt. Man kann sich jetzt aber leicht überzeugen, daß dieses Ergebnis nur bei extrem schwachen Feldern gilt. Der schwache Diamagnetismus kam nämlich dadurch zustande, daß die Zustände mit $n = 1$ in der ersten Näherung einen enormen Paramagnetismus aufweisen, welcher den starken Diamagnetismus der übrigen Zustände im wesentlichen aufhebt. Genügt aber diese erste Näherung nicht mehr — und dies ist für den Grundzustand $n = 1$ schon bei sehr schwachen Feldern der Fall —, dann wird dieser Paramagnetismus schwächer, so daß sich jetzt im ganzen ein starker Diamagnetismus zeigt. — Die merkwürdige Abweichung im Verhalten des Elektronengases bei extrem schwachen Feldern in den zwei untersuchten Fällen — sehr wahrscheinlich existiert sie auch für den zylindrischen Kasten im longitudinalen und transversalen Magnetfeld — ist erst durch die weitere Untersuchung des Problems zu klären. — [2]) Vgl. auch J. C. Slater, Phys. Rev. **51**, 195, 1937.

dagegen ist es für die Berechnung des anormalen Diamagnetismus notwendig, Eigenfunktionen zu benutzen, welche den Grenzbedingungen an der Oberfläche des betrachteten Metallstücks genügen. Die daraus entstehende Frage, wie sich die beiden Behandlungsarten zueinander verhalten, läßt sich leicht beantworten:

Die ebenen Wellen sind zunächst nur Hilfsmittel für die Rechnung, in Wirklichkeit bedient sich Bloch bei der Beschreibung der Elektronenbewegung im Metall der durch Überlagerung solcher ebenen Wellen entstehenden Wellenpakete. In der Blochschen Theorie kommt es aber auf Form und Größe dieser Wellenpakete nicht an; vielmehr kann man für alle Fragen das Wellenpaket durch die seinem Mittelpunkt (im Wellenzahlraum!) entsprechende ebene Welle ersetzen. Dies wird jedoch bei unseren Rechnungen nicht mehr der Fall sein; deshalb werden wir uns die Frage stellen: Wie ist das der ebenen Welle mit der Wellenzahl $\mathfrak{k}$ entsprechende Wellenpaket zu konstruieren? (Es ist natürlich nur seine Form und Größe von Bedeutung, sein Platz wird sich innerhalb des Metalls im Laufe der Zeit ändern.) Auf diese Frage geben wir folgende Antwort:

In der Blochschen Theorie ist die Übergangshäufigkeit vom Zustand $\mathfrak{k}$ zu einem anderen $\mathfrak{k}'$ berechnet worden. Hieraus können wir dann auch die Gesamthäufigkeit dafür berechnen, daß der Zustand $\mathfrak{k}$ zu *irgendeinem* anderen übergeht, woraus sich weiter die *Lebensdauer* τ des Zustandes $\mathfrak{k}$ ergibt. Nun ist es leicht, auf Grund dieser Lebensdauer τ das Wellenpaket zu konstruieren: Wir bestimmen zunächst aus den Ungenauigkeitsrelationen die Energieunschärfe des Zustandes:

$$\tau \cdot \delta E = h. \tag{1}$$

Dann bestimmen wir aus dem Energiespektrum die der Energie δE entsprechenden Impulsunschärfen δp, woraus schließlich auch die räumlichen Dimensionen folgen:

$$\delta x \cdot \delta p = h. \tag{2}$$

Es folgt unmittelbar aus (1), daß einem großen τ-Wert kleine Werte für δE und δp, deshalb nach (2) große δx-Werte entsprechen: Das Wellenpaket wird mit wachsender Lebensdauer größer. Man sieht nach dieser Bemerkung, daß Wellenpakete nicht für alle Zustände konstruierbar sind: Ist die Zeit τ genügend klein, dann sind die Dimensionen des Wellenpakets kleiner als die Dimensionen des Metallstücks, das Wellenpaket bildet also die richtige Darstellung des Zustandes $\mathfrak{k}$. Hat aber die Zeit τ eine gewisse Grenze überschritten, dann ist das Wellenpaket nicht mehr annehmbar: Der Zustand $\mathfrak{k}$ wird in diesem Fall durch eine *Eigenfunktion* dargestellt,

welche den Grenzbedingungen genügt. Zustände der ersten Art wollen wir im folgenden der Kürze halber mit α bezeichnen, dagegen die der zweiten mit β[1]).

Offenbar ist τ eine Funktion von Wellenzahl $\mathfrak{k}$ und Temperatur T. Ferner kann man sofort einsehen, daß im Falle eines kugelsymmetrischen Energiespektrums $E(k)$ die Lebensdauer τ eine *abnehmende* Funktion von $k = |\mathfrak{k}|$ und T ist. Es wird also die Gesamtanzahl von α-Elektronen bei höherer Temperatur größer. Es folgt jedoch aus den Rechnungen der nächsten Paragraphen, daß diese Anzahl immer nur ein kleiner Teil der Gesamtanzahl der Leitungselektronen ist, nämlich nur die Elektronen an der Abfallstelle der Fermi-Verteilung umfaßt: Bis zu den gewöhnlichen Temperaturen befindet sich der größte Teil der Leitungselektronen des Metalls in β-Zuständen. (Damit ist natürlich nicht gesagt, daß das Metall ein Supraleiter ist, da im allgemeinen für die β-Zustände τ zwar groß, aber nicht unendlich groß ist.)

3. Berechnung von τ. Wir benutzen durchweg die vereinfachende Annahme eines kugelsymmetrischen Energiespektrums, wobei die Energie von der Wellenzahl wie bei den freien Elektronen abhängt:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{3}$$

Wir betrachten zunächst die Übergänge zwischen Elektronenzuständen, welche wegen der thermischen Bewegung des Metallgitters eintreten. Die Häufigkeit des Übergangs $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}' = \mathfrak{k} + \mathfrak{q}$ ist im Falle $E_{\mathfrak{k}'} > E_{\mathfrak{k}}$[2]):

$$W_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}'} = \frac{2\,G^{-3}\,C^2\,q^2}{9\,M\,\hbar\,\omega_q} N_q \frac{\partial}{\partial t}\,\Omega\,(E_{\mathfrak{k}'} - E_{\mathfrak{k}} - \hbar\,\omega_q); \tag{4a}$$

und im Falle $E_{\mathfrak{k}'} < E_{\mathfrak{k}}$:

$$W_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}'} = \frac{2\,G^{-3}\,C^2\,q^2}{9\,M\,\hbar\,\omega_q} (N_q + 1) \frac{\partial}{\partial t}\,(E_{\mathfrak{k}'} - E_{\mathfrak{k}} + \hbar\,\omega_q). \tag{4b}$$

---

[1]) Man sollte eigentlich auch für die Konstruktion der Wellenpakete diese den Grenzbedingungen genügende Eigenfunktionen verwenden. (Z. B. im Falle des unendlich langen Parallelepipeds — welches das „natürliche" Modell für das Studium der Leitfähigkeit bildet — Sinusfaktoren für die zwei dem Querschnitt entsprechenden Koordinaten und Exponentialform für die dritte.) Nun sind aber bei den (in Vergleich zu den Kastendimensionen) kleinen Wellenpaketen die Grenzbedingungen auch in dem Fall praktisch erfüllt, daß man sie aus ebenen Wellen konstruiert, welche wegen ihrer rechnerischen Vorteile auch wirklich vorzuziehen sind. — [2]) Es sind im allgemeinen die Bezeichnungen von A. Sommerfeld u. H. Bethe, Handb. d. Phys. XXIV/2 verwendet.

G ist die Anzahl von Atomen auf der Kante des für die Periodizität der Eigenfunktionen zugrunde gelegten Würfels; C das Matrixelement der Störungsenergie für den Übergang $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$ (im folgenden wird es als von den Zuständen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$ unabhängig angenommen); q die Wellenzahl, ω_q die Frequenz und N_q die Anregungsstärke der beteiligten Gitterwelle:

$$\omega_q = u_0 q; \qquad N_q = \frac{1}{e^{\hbar \omega_q / k T} - 1}, \tag{5}$$

u_0 die Schallgeschwindigkeit im Metall; M die Atommasse des Metalls und Ω eine Abkürzung für die Funktion

$$\Omega(x) = 2 \frac{1 - \cos \frac{x l}{\hbar}}{(x/\hbar)^2}. \tag{6}$$

Für die wirkliche Übergangshäufigkeit ist ferner die Besetzung der verschiedenen Zustände von Bedeutung. Sie wird im Falle des thermischen Gleichgewichts durch die Fermische Funktion bestimmt:

$$f(\mathfrak{k}) = \frac{1}{e^{E_{\mathfrak{k}} - \zeta / k T} + 1}, \tag{7}$$

wobei ζ die Grenzenergie des Elektronengases bei $T = 0$ bedeutet.

Wir berechnen jetzt die gesamte Häufigkeit ν_1 für den Übergang vom Zustand $\mathfrak{k}$ zu irgendeinem anderen. Dabei werden wir $f(\mathfrak{k}) = 1$ ansetzen, da wir uns für die Lebensdauer des Zustandes $\mathfrak{k}$ interessieren, während für die anderen Zustände die Besetzungen $f(\mathfrak{k}')$ aus (7) zu entnehmen sind. Es wird dann:

$$\nu_1(\mathfrak{k}) = \int W_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}'} [1 - f(\mathfrak{k}')] \, \mathrm{d} n_{\mathfrak{k}'}, \tag{8}$$

wobei die Integration z. B. im Wellenzahlraum über alle Zustände $\mathfrak{k}'$ vorzunehmen ist.

Die Integration läßt sich in bekannter Weise ausführen. Wir geben zunächst das Ergebnis für den Grenzzustand ζ und tiefe Temperaturen $T \ll \Theta$:

$$\nu_{1\zeta} = \frac{2 m C^2 \Omega_0}{9 \pi M \hbar^5 k_0 u_0^4} \cdot \int_0^\infty \frac{x^2 \, \mathrm{d} x}{(e^x - 1)(1 + e^{-x})} \cdot (k T)^3. \tag{9}$$

Ω_0 ist das Atomvolumen des Metalls und k_0 die Wellenzahl des Zustandes ζ. Wir führen noch in diese Formel den spezifischen Widerstand ϱ_0 bei $T = 273^0$ ein, um uns von unbekannten Größen zu befreien. Es folgt:

$$\nu_{1\zeta} \approx 0{,}6 \cdot \frac{q_0 e^2 \zeta \varrho_0}{\hbar^2} \cdot \frac{T^3}{273 \cdot \Theta^2}. \tag{9a}$$

Dabei bedeutet q_0 die größte Gitterwellenzahl:

$$q_0 = \left(\frac{6\pi^2}{\Omega_0}\right)^{1/3}. \tag{10}$$

Wir bemerken in Formel (9) oder (9a) zunächst das Wegfallen der Zahl G, dann noch die Proportionalität von ν_1 zu T^3. Formel (9a) ergibt z. B. für Au bei $T = 5^0$ ($\varrho_0 \approx 2 \cdot 10^{-18}$, $q_0 \approx 1{,}5 \cdot 10^8$, $\zeta \approx 9 \cdot 10^{-12}$, $\Theta = 175^0$):

$$\nu_{1\zeta} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ sec}^{-1}.$$

Dagegen für Pb[1] ($\varrho_0 \approx 4 \cdot 10^{-17}$, $q_0 \approx 1{,}3 \cdot 10^8$, $\zeta \approx 9 \cdot 10^{-12}$, $\Theta \approx 92^0$):

$$\nu_{1\zeta} \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}.$$

Für den Zustand $\mathfrak{k}$ ergibt sich aus der Rechnung:

$$\nu_1 \approx 2\,(1 - f_{\mathfrak{k}})\,\nu_{1\zeta}, \tag{11}$$

wobei ein in Vergleich zu $1 - f_{\mathfrak{k}}$ langsam veränderlicher Faktor vernachlässigt wurde.

Wir kommen jetzt zu den Übergängen wegen der statischen Gitteranomalien. Die Häufigkeit des Übergangs $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$ ist in diesem Fall[2]):

$$W_{\mathfrak{k}\mathfrak{k}'} = \frac{4\,G^{-3}\,\Delta^2\,C^2\,(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')^2}{9\,\hbar^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\,\Omega\,(E_{\mathfrak{k}} - E_{\mathfrak{k}'}). \tag{12}$$

Dabei ist die Länge Δ ein Maß für die Abweichung des wirklichen Gitters vom ideellen. Aus der Häufigkeit (12) wird sich durch Integration über die Zustände $\mathfrak{k}'$ die gesamte Häufigkeit ν_2 ergeben. Wir finden zunächst für den Zustand ζ:

$$\nu_{2\zeta} = \frac{4\,\Delta^2\,C^2\,\Omega_0\,m\,k_0^3}{9\,\pi\,\hbar^3}, \tag{13}$$

oder nach Einführung des Restwiderstandes ϱ_r:

$$\nu_{2\zeta} = \frac{e^2\,k_0\,\zeta\,\varrho_r}{8\,\pi^2\,\hbar^2}. \tag{13a}$$

G ist auch jetzt aus den Formeln herausgefallen, während sich ν_2 von der Temperatur unabhängig ergibt. Nehmen wir größenordnungsmäßig $\varrho_r \approx 5 \cdot 10^{-4}\,\varrho_0$ an, dann ergibt sich aus (13a):

für Au $\nu_{2\zeta} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ sec}^{-1}$,

für Pb $\nu_{2\zeta} \approx 6 \cdot 10^{10} \text{ sec}^{-1}$.

---

[1]) Es ist der doppelte des wirklichen Wertes von ϱ_0 eingesetzt, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß es bei Pb (mindestens) zwei teilweise besetzte Energiezonen gibt. — [2]) Nach L. Nordheim, Ann. d. Phys. **9**, 607, 1931. Die Formel wurde in den Sommerfeld-Betheschen Bezeichnungen umgeschrieben.

Für den Zustand $\mathfrak{k}$ ergibt sich aus der Rechnung:

$$\nu_2 = 2\,(1 - f_{\mathfrak{k}})\,\nu_{2\,\mathfrak{k}}. \tag{14}$$

Es wäre nun noch eine dritte Häufigkeit ν_3 wegen der Stöße der Elektronen miteinander zu untersuchen. Wir werden aber hier ν_2 als klein voraussetzen und dementsprechend vernachlässigen.

4. Konstruktion der Wellenpakete. Die Lebensdauer des Zustandes $\mathfrak{k}$ ist:

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_1 + \nu_2}. \tag{15}$$

Aus τ läßt sich jetzt nach (1) die Energieunschärfe des Zustandes bestimmen:

$$\delta E = \frac{\hbar}{\tau}.$$

Aus der Größe δE läßt sich das Wellenpaket im Impulsraum um den Impulsvektor $\mathfrak{p} = \hbar\mathfrak{k}$ konstruieren. Seine Dimensionen $\delta p_{\parallel}$ (parallel zu $\mathfrak{p}$) und $\delta p_{\perp}$ (senkrecht zu $\mathfrak{p}$) sind aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$\delta E = \frac{p\,\delta p_{\parallel}}{m} = \frac{\delta p_{\perp}^2}{8\,m}. \tag{16}$$

Aus $\delta p_{\parallel}$, $\delta p_{\perp}$ lassen sich dann die eigentlichen Dimensionen des Wellenpaketes nach (2) berechnen:

$$\delta x = \frac{\hbar}{\delta p}.$$

Es ergibt sich daher:

$$\delta x_{\parallel} = \frac{p}{m}\tau, \qquad \delta x_{\perp}^2 = \frac{\hbar}{8\,m}\tau. \tag{17}$$

Gleichungen (17) stellen ein in der Richtung $\mathfrak{p}$ langgestrecktes, rotationssymmetrisches Wellenpaket dar. Man findet nämlich leicht:

$$\frac{\delta x_{\parallel}}{\delta x_{\perp}} = \frac{\delta p_{\perp}}{\delta p_{\parallel}} = \frac{8\,p}{\delta p_{\perp}} \gg 1.$$

Die linearen Dimensionen des betrachteten Metallstücks seien von der Größenordnung R. Dann ist das Wellenpaket annehmbar, solange seine größere Dimension die Länge R nicht überschreitet:

$$\delta x_{\parallel} = \frac{p}{m}\tau < R, \tag{18}$$

oder nach Einführung der Geschwindigkeit $v = p/m$:

$$v\tau < R \text{ *}). \tag{18a}$$

Es ist also die größte Lebensdauer, für die noch ein Wellenpaket zu konstruieren ist:

$$\tau_{\max} = \frac{R}{v}. \tag{19}$$

In der Nähe des Zustandes ζ ist im allgemeinen $v \approx 10^8$ cm/sec. Es wird also für normale makroskopische Dimensionen $R \approx 1$ cm:

$$\nu_{\min} = \frac{v}{R} \approx 10^8 \,\text{sec}^{-1}.$$

Andererseits ist ν_ζ nach den Ergebnissen des § 3 bei tiefen Temperaturen von der Größenordnung $10^{10}\,\text{sec}^{-1}$. Es folgt daraus, daß nur diejenigen Zustände zur Klasse α gehören, bei welchen größenordnungsmäßig

$$1 - f > 10^{-2}$$

gilt, d. h. im wesentlichen die Zustände in der Abfallstelle der Fermischen Verteilungsfunktion.

5. Die Wechselwirkung der Elektronen. Zu einer einfachen Bestimmung der Wechselwirkungsenergie werden wir durch folgende Überlegung geführt: Sei V die räumliche Lage eines bestimmten Wellenpakets an einem gegebenen Zeitpunkt. Die mittlere Ladungsdichte innerhalb des Volumens V ist gleich Null [insofern das Volumen V eine große Anzahl von Elementarzellen des Gitters enthält, was aber bei tiefen Temperaturen immer der Fall ist; vgl. Gleichung (17)]. Diese Ladungsdichte ist aber die gesamte Dichte, welche man unter Mitberücksichtigung des durch das betrachtete Wellenpaket beschriebenen Elektrons erhält, während offenbar für dessen Zustand nur das Feld der übrigen im Metall enthaltenen Ladungen von Bedeutung sein sollte[1]). Die übrigen Ladungen geben nun im Raum V zu einer *positiven* mittleren Ladungsdichte e/V Anlaß. Es ergibt sich also eine *negative* Wechselwirkungsenergie, welche dem Betrag nach der doppelten Selbstenergie einer im Raum V verteilten Ladung e gleich ist.

Wir werden im folgenden den Raum V als eine Kugel vom Radius

$$r = \frac{\delta x_{11}}{2}$$

*) Es folgt weiter daraus, daß die Wellenpakete im allgemeinen von Störungen durch Stöße an den Wänden frei sind. — [1]) Unsere Methode entspricht also der in der Kristalloptik üblichen Unterscheidung zwischen erregendem und Gesamtfeld.

ansehen, also von der langgestreckten Form des Wellenpakets absehen. Dann ist der Wert der Wechselwirkungsenergie größenordnungsmäßig sofort anzugeben:

$$\varepsilon \approx -\frac{e^2}{r} = -2\frac{e^2}{v}\nu\ ^*). \tag{20}$$

In Fig. 1 ist die Änderung des Energiespektrums dargestellt, wenn man die Energie (20) nur mit der Häufigkeit ν_2 berechnet. Die Häufigkeit ν_1 wird eine weitere geometrisch ähnliche Deformation des Spektrums mit sich bringen, wobei die Breite dieser Deformation zu T^3 proportional ist. Durch den Punkt C ist das Energiespektrum in zwei Teile geteilt: Rechts von C liegen die Zustände α, links die β. Es ist ferner zu bemerken, daß die Energie ε auch für die β-Zustände existiert, wobei sie aber den sehr kleinen konstanten Wert $-e^2/R$ besitzt[1]).

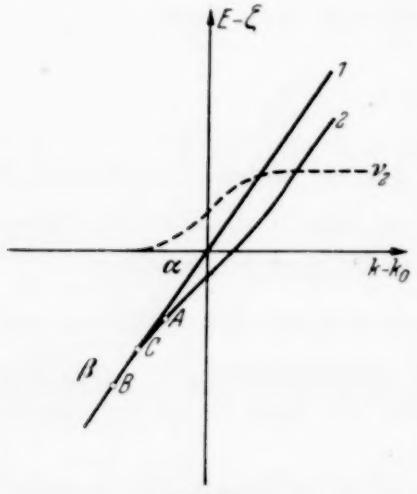


Fig. 1.
Kurve 1: Ohne Wechselwirkung.
Kurve 2: Mit Wechselwirkung.

6. Die Koppelung der α-Zustände. Das neue Energiespektrum der Fig. 1 verläuft vollkommen stetig, so daß man zunächst den Eindruck haben würde, daß es nicht mit Supraleitung in Zusammenhang steht. Eine genauere Betrachtung zeigt aber, daß es nicht der Fall ist.

Wir nehmen an, ein Elektron geht vom Zustand B der Klasse β zum Zustand A der Klasse α über (Fig. 1), und fragen uns nach der für diesen Prozeß erforderlichen Energie. Diese Energie ist nämlich nicht einfach der aus Fig. 1 zu entnehmenden Energieänderung $E_A - E_B$ gleich, weil die Zustände α durch die Wechselwirkung miteinander gekoppelt werden: Eine Erhöhung

---

*) Sollte man die langgestreckte Form des Wellenpakets berücksichtigen, dann würde in Formel (20) noch ein Faktor $\lg \frac{2\,\delta x_{\parallel}}{\delta x_{\perp}}$ eintreten. Nun ist aber dieser Faktor nach (17)

$$\lg \frac{2\,\delta x_{\parallel}}{\delta x_{\perp}} \approx \lg \sqrt{\frac{64\,\zeta}{\hbar\,\nu}} \approx \lg 10^3 \approx 8,$$

also für die Größenordnung von ε unwesentlich.

[1]) Diesen kleinen ε-Wert würde man ferner bei Zugrundelegung der Blochschen Eigenfunktionen erhalten, diesmal aber für *irgendeinen* $\mathfrak{k}$-Wert. Die Form des Energiespektrums würde sich also in diesem Fall nicht ändern.

der Besetzung des Zustandes A hat eine Verminderung der Übergangshäufigkeiten r der anderen α-Zustände zur Folge. Dadurch entsteht aber eine Erhöhung der Energie dieser Zustände, und diese zusätzliche Erhöhung muß natürlich beim Übergang $B \to A$ ebenfalls zugeführt werden.

Es ist leicht, diese zusätzliche Energie für die Häufigkeiten r_2 zu berechnen. Wir nehmen am einfachsten an, daß wir die Besetzung aller Zustände mit $k = k_A$ (also derjenigen, welche im Wellenzahlraum auf der durch A um den Anfangspunkt gelegenen Kugel liegen) um δf erhöhen. Dann ändert sich nach (14) nur die diesen Zuständen entsprechende Häufigkeit r_2, und zwar um den Betrag:

$$\delta r_2 = -2\,\delta f \cdot r_{2\zeta}.$$

Infolgedessen erhöht sich die Energie des Zustandes nach (20) um:

$$\delta \varepsilon \approx 2\,\frac{e^2}{v}\, r_{2\zeta} \cdot 2\,\delta f.$$

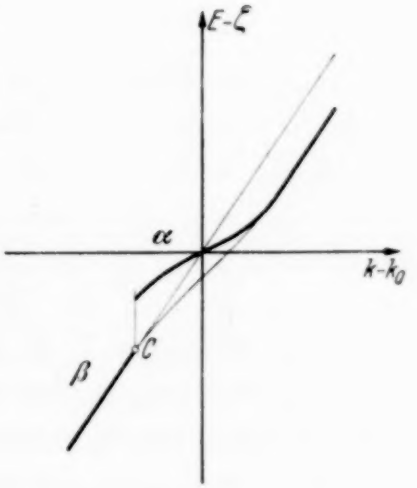


Fig. 2.

Berücksichtigen wir noch, daß der Zustand A mit f Elektronen besetzt war, so kommen wir zu dem Schluß, daß die zusätzliche Energie für die Anbringung der neuen δf Elektronen gleich $f\,\delta\varepsilon$ sein muß. Daraus folgt die zusätzliche Energie für ein Elektron:

$$\varepsilon' = \frac{f\,\delta\varepsilon}{\delta f} = 2f \cdot \varepsilon_\zeta, \tag{21}$$

wobei ε_ζ folgende Bedeutung hat:

$$\varepsilon_\zeta \approx 2\,\frac{e^2}{v}\, r_{2\zeta}. \tag{22}$$

Liegen jetzt die Punkte A und B dem Punkt C sehr nahe, dann nimmt der Unterschied $E_A - E_B$ einen sehr kleinen Wert an; *dagegen nähert sich die Energie* (21) *einem von Null verschiedenen Grenzwert*

$$E_s = 2\,\varepsilon_\zeta. \tag{23}$$

Für den Übergang eines Elektrons von einem β- zu einem α-Zustand ist mindestens die Energie E_s notwendig.

Wollen wir die graphische Darstellung des Energiespektrums in der Weise vervollständigen, daß sie unmittelbar die Energieverhältnisse bei den verschiedenen Übergängen zeigt, dann haben wir die Punkte der Kurve 2 in Fig. 1 um die Kopplungsenergie (21) zu erhöhen. Es entsteht in dieser Weise das *unstetige* Energiespektrum der Fig. 2[1]). Die Unstetigkeit erscheint genau an der Grenze C der Zustände α und β, und hat nach (23), (22) den Betrag:

$$E_s \approx 4 \frac{e^2}{v} \nu_{2z}. \tag{23a}$$

Außer den Häufigkeiten ν_2 sind auch die ν_1 vorhanden, welche ebenfalls durch die Erhöhung der Besetzung von A eine Verminderung erfahren. Gleichzeitig werden aber die ν_1 wegen der Abnahme der Besetzung von B größer; und wenn die Zustände A und B sehr nahe aneinanderliegen, werden sich offenbar beide Wirkungen in erster Näherung wegheben. Eine Berücksichtigung von ν_1 ist also nicht notwendig[2]). Es ist dagegen zu bemerken, daß bei der Häufigkeit ν_2 die Abnahme der Besetzung von B ohne Bedeutung ist, da die Gitteranomalien keine Übergänge zwischen β-Zuständen verursachen können, also ν_2 von der Besetzung unabhängig den Wert Null hat. Nach dieser Bemerkung ist eine genaue Definition des Punktes C in Fig. 1 möglich: Diesem Punkt entspricht derjenige Zustand, bei welchem Übergänge wegen der statischen Gitteranomalien *nicht mehr* möglich sind.

Man rechnet aus Gleichung (23a):

$$\text{für Au} \quad E_s \approx 2 \cdot 10^{-17} \text{ erg},$$
$$\text{für Pb} \quad E_s \approx 4 \cdot 10^{-16} \text{ erg}.$$

Nimmt man also für den Sprungpunkt T_s etwa die Beziehung

$$k T_s \approx E_s \tag{24}$$

an, dann folgt[3]):

$$\text{für Au} \quad T_s \approx 0{,}1^0,$$
$$\text{für Pb} \quad T_s \approx 2^0.$$

---

[1]) Man beachte die Analogie zu der von Welker (a. a. O.) angenommenen Form des Energiespektrums. — [2]) Im wesentlichen bedeutet dies, daß die Größe der Wellenpakete in der Nähe des Sprungpunktes von der Temperatur unabhängig wird. Dadurch wird es unmöglich, daß bei weiter sinkender Temperatur ein α-Zustand durch Vergrößerung der Dimensionen des entsprechenden Wellenpakets in eine β-Form übergeht. — [3]) Für das experimentelle Material vgl. K. Steiner und P. Grassmann, Supraleitung, Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1937.

7. *Diskussion der Ergebnisse.* Zunächst fällt es auf, daß sich der Sprungpunkt nach (24), (23a) und (13a) proportional dem Restwiderstand ändern soll. Dieses Ergebnis entspricht den experimentellen Tatsachen nicht: Zwar gibt es einen Einfluß von ϱ_r auf T_s in der oben verlangten Richtung, dieser Einfluß ist aber sehr klein: Z. B. bei Zinn steigt die Halbwertstemperatur um etwa 0,3%, wenn ϱ_r um 50% größer wird[1]). Die Ursache dieser Diskrepanz liegt wahrscheinlich an der Anwendung der Gleichung (12), welche zu der Proportionalität zwischen r_2 und ϱ_r führte. Diese Proportionalität ist aber nicht sehr einleuchtend: Kleiner Wert von ϱ_r entspricht dem Falle großer Kristalliten, bei welchen man nur kleine Streuungswinkel der Elektronenwellen zu erwarten hätte. Dagegen sind bei kleineren Kristalliten größere Streuungswinkel zu erwarten, so daß für die Vergrößerung von ϱ_r ein proportionales Anwachsen von r_2 nicht wahrscheinlich erscheint. Ob durch diese Bemerkung die Schwierigkeit auch wirklich zu beseitigen ist, wird natürlich nur eine genauere Kenntnis des Mechanismus des mit der mikrokristallinen Struktur zusammenhängenden Restwiderstandes zeigen.

Der *extrem steile* Übergang zum supraleitenden Zustand ist in unserem Ergebnis nicht enthalten. Es ist aber eine Möglichkeit zur Erklärung dieser Steilheit vorhanden: Das Energiespektrum der Fig. 2 im Bereich der α-Zustände wird mit sinkender Temperatur flacher. Nun hat aber diese Abflachung eine Vergrößerung von r_1 und r_2 zur Folge [wie es sich bei der Integration von (4) bzw. (12) herausstellt]. Dadurch wird sekundär E_s größer, ferner auch die Abflachung stärker, so daß es möglich erscheint, daß schließlich die Entwicklung wie diejenige eines labilen Gleichgewichts aussieht[2]). Zunächst ist dies aber nur eine Vermutung, deren Begründung eine eingehende Prüfung erfordert[3]).

Nach unseren Ergebnissen sollte jedes Metall bei genügend tiefen Temperaturen ein Supraleiter sein. Darüber wäre nur noch zu bemerken, daß diese Behauptung beim heutigen Stand unserer Kenntnisse über die Supraleitung nicht als ein Widerspruch gegen die Erfahrung angesehen werden kann.

---

[1]) K. Steiner u. P. Grassmann, Phys. ZS. **36**, 516, 1935. — [2]) In dieser Weise würde auch r_1 eine Rolle bei der Bestimmung von T_s spielen, wie es bei Metallen mit nicht sehr tiefen T_s-Werten zu erwarten wäre. — [3]) Man überlege sich, daß in einer weiteren Näherung die zugrunde gelegten Formeln (4) und (12) nachzuprüfen sind, da sie eigentlich für einfache ebene Wellen abgeleitet wurden. — Auch wäre anstatt der Annahme eines kugelsymmetrischen Energiespektrums die wirkliche Form der Brillouinschen Zone zu berücksichtigen.

Der Einfluß mechanischer Deformation auf den Sprungpunkt läßt sich nach den hier entwickelten Vorstellungen in größenordnungsmäßiger Übereinstimmung erklären. Bei Sn z. B. wird durch einen hydrostatischen Druck von 300 kg/cm² der Sprungpunkt um etwa $1^0/_{00}$ *erniedrigt*[1]). Von derselben Größenordnung ist auch die Verkleinerung der Abstände der Metallatome[2]). Man sollte also ein um denselben Betrag *größeres* Austauschintegral, ebenfalls auch eine *größere* Steigung des Energiespektrums erwarten; dadurch also eine um denselben Betrag *kleinere* Übergangshäufigkeit ν, wie es Formel (24) verlangt.

Für eine Erklärung der Erscheinungen, welche mit dem Eindringen eines Magnetfeldes in den Supraleiter zusammenhängen, wird eine genauere Kenntnis des diamagnetischen Verhaltens des Elektronengases erforderlich. Eine Abschätzung des magnetischen Schwellenwertes bei $T = 0$ wurde schon von Welker angegeben[3]).

Noch eine letzte Bemerkung. Nehmen wir für einen Augenblick an, es sei bei $T = 0$ die für ein normalleitendes Metall zu erwartende Elektronenverteilung verwirklicht:

$$f = 1 \quad \text{für} \quad E \leqq \zeta; \quad f = 0 \quad \text{für} \quad E > \zeta. \tag{25}$$

Offenbar gehören dann alle besetzten Zustände der Klasse β, während alle α-Zustände unbesetzt sind. Daraus folgt aber nach (21), daß die zusätzliche Energie ε' für alle α-Zustände verschwindet. In diesem Falle kann also der Energiesprung E_s nicht mehr zustande kommen, infolgedessen wird die Supraleitung unmöglich. Nun ist aber eine Verwirklichung der Verteilung (25) trotz des bei $T \neq 0$ immer noch zu erwartenden E_s nur in dem Falle möglich, daß der Energiesprung E_s gegenüber der inneren Abstufung des Energiespektrums (wegen der endlichen Dimensionen des betrachteten Metallstücks) klein ist. Die Größe dieser Abstufung in der Nähe von ζ ist (bei linearen Dimensionen von der Größenordnung R):

$$\delta E \approx \frac{\hbar^2 k_0}{m R}.$$

Die Supraleitung wird also unmöglich, wenn die Beziehung

$$E_s < \frac{\hbar^2 k_0}{m R} \tag{26}$$

---

[1]) G. J. Sizoo u. H. Kamerlingh Onnes, Comm. Leiden Nr. 180b. — [2]) Vgl. A. Papapetrou, ZS. f. Phys. **92**, 513, 1934. — [3]) H. Welker, a. a. O.

erfüllt ist. Diese Ungleichung scheint das Verhalten von sehr dünnen Schichten zum Ausdruck zu bringen: Ist die Schichtdicke kleiner als

$$R_0 = \frac{\hbar^2 k_0}{m E_s}, \tag{27}$$

dann kann die Schicht nicht supraleitend werden. Mit den mittleren Werten $T_s \approx 5^0$, $k_0 \approx 10^8\,\mathrm{cm}^{-1}$ ergibt (27) den Wert

$$R_0 \approx 10^{-4}\,\mathrm{cm},$$

welcher mit der Erfahrung größenordnungsmäßig übereinstimmt. Bei tieferem T_s wird R_0 entsprechend größer, etwa $10^{-2}\,\mathrm{cm}$ bei $T_s \approx 0{,}05$. Ist also ein Metall mit vermutlich sehr tiefem T_s auf Supraleitfähigkeit zu prüfen, dann sind *sehr dünne* Drähte für die Untersuchung *ungeeignet*.

Herrn Dr. Welker in München, der mir freundlicherweise seine Arbeit „Über ein elektronentheoretisches Modell des Supraleiters" vor deren Erscheinen zur Verfügung stellte, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dr. Hönl danke ich herzlich für wertvolle Diskussionen.

Der Einfluß eines elektrischen Kernquadrupolmoments auf den Paschen-Back-Effekt der Hyperfeinstruktur und die Struktur der Quecksilberlinie 2537 A.

Von **Th. Schmidt***) in Greifswald.

(Eingegangen am 25. Oktober 1938.)

Die Formeln für die Energieniveaus im Paschen-Back-Effekt der Hyperfeinstruktur unter Berücksichtigung des Kernquadrupolmomentes werden angegeben und auf Messungen von O. Buhl an der Quecksilberresonanzlinie λ 2537 angewandt.

Bei der magnetischen Umwandlung (Paschen-Back-Effekt) der Hyperfeinstruktur ist bisher der Einfluß eines etwa vorhandenen Kernquadrupolmoments nicht berücksichtigt worden. Obwohl er im allgemeinen klein sein wird, kann er sich doch bei manchen Messungen bemerkbar machen, wie wir es unten im Falle der Quecksilberresonanzlinie λ 2537 sehen werden.

Die Elektroneneigenfunktion des zu untersuchenden Termes und die zugehörige Energie seien bekannt. Dann treten als Störungsenergie ε die Wechselwirkung zwischen Atomkern und Elektronenhülle[1]) und die Wechselwirkung der Elektronenhülle mit dem äußeren Magnetfeld auf:

$$\varepsilon = a\,(\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}) + b\,[2\,(\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j})\,(2\,(\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}) + 1) - \tfrac{4}{3}\,i\,(i+1)\,j(j+1)] + g_j \cdot \mu \cdot (\mathfrak{H}\,\boldsymbol{j}).$$

Hier sind $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$ die Drehimpulse von Atomkern und Elektronenhülle, a und b die Kopplungskonstanten der magnetischen Dipol- bzw. elektrischen Quadrupolwechselwirkung, $\mathfrak{H}$ das Magnetfeld, g_j der Landé-Faktor der Elektronenhülle und μ das Bohrsche Magneton.

Wir nehmen an, daß keine anderen Elektronenzustände energetisch benachbart liegen und können dann $\boldsymbol{j}$ als Bewegungskonstante ansehen.

---

*) Stipendiat der Mochizukistiftung der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften. — [1]) H. Casimir, Verh. Teylers tweede Genootschap, Haarlem, 11, 1936.

Das Magnetfeld sei parallel zur z-Achse. Zur Aufstellung der Säkulargleichungen gehen wir von der Darstellung aus, in der der Gesamtdrehimpuls f und seine z-Komponente m diagonal sind. Die beiden ersten Glieder der Störungsenergie sind dann diagonal und haben die Werte

$$a\frac{C}{2} \quad \text{bzw.} \quad b[C(C+1) - \tfrac{4}{3}i(i+1)j(j+1)],$$

wo $C = f(f+1) - i(i+1) - j(j+1)$ ist[1]). Mit $H = g_j \cdot \mu \cdot \mathfrak{H}_z$ lautet das dritte Glied $H \cdot \boldsymbol{j}_z$. Wir brauchen also nur die Matrix für $\boldsymbol{j}_z$. Ihre Diagonalglieder sind[2]):

$$(i\,j\,f\,m\,|\,\boldsymbol{j}_z\,|\,i\,j\,f\,m) = m\frac{j(j+1) - i(i+1) + f(f+1)}{2f(f+1)} \cdot h.$$

Die Nichtdiagonalglieder verschwinden alle bis auf:

$$(i\,j\,f\,m\,|\,\boldsymbol{j}_z\,|\,i\,j\,f-1\,m) = (i\,j\,f-1\,m\,|\,\boldsymbol{j}_z\,|\,i\,j\,f\,m)$$

$$= \sqrt{f^2 - m^2} \cdot \sqrt{\frac{(f-j+i)(f+j-i)(j+i+1+f)(j+i+1-f)}{4f^2(2f-1)(2f+1)}} \cdot h.$$

Da die gesamte Störungsenergie in m diagonal ist, zerfällt die Säkulargleichung nach den Werten für m. Die einzelnen Gleichungen sind nun ohne weiteres hinzuzuschreiben und ihre Lösung gibt das gesuchte Termaufspaltungsbild für beliebige Feldstärken[3]).

Wir wenden uns zur Linie λ 2537 ($^3P_1 \rightarrow {}^1S_0$) des Quecksilbers. Die magnetische Umwandlung ist hier bereits (ohne Berücksichtigung des Quadrupolmoments) von Inglis[4]) behandelt worden. Der untere Term zeigt keine Aufspaltung und wir müssen nur den oberen Term $^3P_1$ untersuchen. Allein das Isotop 201 mit dem Spin $i = {}^3/_2$ besitzt ein Quadrupol-

---

[1]) Der unwesentliche konstante Summand bei b wird meist weggelassen. — [2]) Siehe z. B. Condon-Shortley, Theory of Atomic Spectra, Cambridge 1935. — [3]) Es sei noch darauf hingewiesen, daß dieselben Säkulargleichungen für die Ablenkung von Atomstrahlen im inhomogenen Magnetfeld gelten. Die Ablenkung ist proportional zu $\partial\varepsilon/\partial\mathfrak{H}_z$, dem magnetischen Moment des betreffenden Zustandes in der Feldrichtung. Ein Einfluß des Quadrupolmoments ist natürlich nur bei Termen vorhanden, die keine kugelsymmetrische Elektronenladungsverteilung besitzen. (Vgl. S. Millman und I. I. Rabi, Phys. Rev. **53**, 384, 1938.) — [4]) D. R. Inglis, ZS. f. Phys. **84**, 466, 1933.

moment und hier müssen die Formeln von Inglis dementsprechend erweitert werden.

Mit Hilfe der oben angegebenen allgemeinen Formeln erhält man die drei Säkulargleichungen:

$$m = \frac{1}{2}: \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}H - \frac{5}{2}a + 10b - \varepsilon & \frac{\sqrt{5}}{3}H & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{3}H & \frac{2}{15}H - a - 8b - \varepsilon & \frac{3}{5}H \\ 0 & \frac{3}{5}H & \frac{1}{5}H + \frac{3}{2}a + 2b - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

$$m = \frac{3}{2}: \begin{vmatrix} \frac{2}{5}H - a - 8b - \varepsilon & \sqrt{\frac{6}{5}}H \\ \frac{\sqrt{6}}{5}H & \frac{3}{5}H + \frac{3}{2}a + 2b - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

$$m = \frac{5}{2}: \quad \left| H + \frac{3}{2}a + 2b - \varepsilon \right| = 0.$$

Zur Rechnung ist es am bequemsten, nach H aufzulösen, dann kommt mit:

$$\alpha = -\tfrac{5}{2}a + 10b - \varepsilon,$$
$$\beta = -a - 8b - \varepsilon,$$
$$\gamma = \tfrac{3}{2}a + 2b - \varepsilon.$$

$m = {}^1/_2$: $H^2(60b - 15\varepsilon) - H(3\alpha\beta + 2\alpha\gamma - 5\beta\gamma) - 15\alpha\beta\gamma = 0,$

$m = {}^3/_2$: $H(3\beta + 2\gamma) + 5\beta\gamma = 0,$

$m = {}^5/_2$: $H + \gamma = 0.$

Durch Umkehrung des Vorzeichens von H entstehen die entsprechenden Gleichungen für $m = -{}^1/_2, -{}^3/_2, -{}^5/_2$.

Man kann die Säkulargleichungen auch wie Inglis (l. c.) aus den Diagonalgliedern der beiden Grenzfälle für schwaches und starkes Magnetfeld ableiten. Die Diagonalglieder der Quadrupolwechselwirkung in der $m_i m_j$ Darstellung lauten allgemein:

$$\left(i\,j\,m_i\,m_j \mid 2\,(i,j)\,(2\,(i,j)+1) - \tfrac{4}{3}\,i\,(i+1)\,j\,(j+1) \mid i\,j\,m_i\,m_j\right)$$
$$= \tfrac{2}{3}\,i\,(i+1)\,j\,(j+1) + 6\,m_i^2\,m_j^2 - 2\,m_j^2\,i\,(i+1) - 2\,m_i^2\,j\,(j+1).$$

Im vorliegenden Falle sind also die Energien für starkes Feld:

m_j	m_i	m	ε
1	$^3/_2$	$^5/_2$	$^3/_2\,a + 2\,b + H$
1	$^1/_2$	$^3/_2$	$^1/_2\,a - 2\,b + H$
1	$-\,^1/_2$	$^1/_2$	$-\,^1/_2\,a - 2\,b + H$
0	$^3/_2$	$^3/_2$	$-\,4\,b$
0	$^1/_2$	$^1/_2$	$4\,b$
$-\,1$	$^3/_2$	$^1/_2$	$-\,^3/_2\,a + 2\,b - H$

O. Buhl hat kürzlich mit Hilfe des Mrozowskischen Filterverfahrens[1]) die Zeemanaufspaltung der Hyperfeinstruktur von λ 2537 untersucht[2]). Zur Berechnung der Lage der Komponenten benutzt er die Formeln von Inglis. Mit den oben angegebenen erhält man etwas abweichende Werte. Da aus seinen Messungen die vollständige Struktur, insbesondere der ungeraden Isotopen nicht festgelegt werden kann, benutzen wir die Messungen von H. Schüler und dem Verfasser[3]) an λ 4078 ($7\,s\,{}^1S_0 \rightarrow {}^3P_1$), bei denen die Struktur der ungeraden Isotope im ${}^3P_1$ bestimmt wurde. Bei λ 2537 muß diese Struktur dieselbe sein, nur die Verschiebung der beiden Isotope gegeneinander ist eine andere. Die Messungen von Buhl zeigen nun, daß bei einem Magnetfeld von 1930 Ø die Zeemankomponente $m = {}^1/_2$ von c über den Schwerpunkt der unverschobenen Linien B und c hinüberwandert[4]). Die Säkulargleichung für $m = {}^1/_2$ liefert mit Hilfe der Werte $a = -\,181{,}67$ und $b = -\,1{,}03$ für das Isotop 201 [3]), daß B und c praktisch zusammenfallen. Damit ist die gegenseitige Lage der ungeraden Isotope festgelegt. In Übereinstimmung mit Mrozowski[5]) zeigt sich, daß die Annahme von Inglis, B und c seien etwa $20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-1}$ voneinander entfernt, nicht zutrifft.

Für die Bestimmung der Lage der geraden Isotope aus den Messungen von Buhl brauchen wir einen genauen Wert von $g_j \cdot \mu$. Da keine reine Russel-Saunders-Kopplung vorliegt und außerdem Abweichungen von den normalen Gesetzen der mittleren Kopplung auftreten[6]), ist ein verläßlicher Wert auf theoretischem Wege nicht zu erhalten[7]). Zur Eichung benutzen wir daher Messungen, die Mrozowski vor kurzem durchgeführt hat (siehe

---

[1]) S. Mrozowski, Bull. Akad. Pol. 1930, S. 464; 1931, S. 489. — [2]) O. Buhl, ZS. f. Phys. **109**, 180, 1938; **110**, 395, 1938. — [3]) H. Schüler u. Th. Schmidt, ebenda **98**, 239, 1935. — [4]) Bezeichnungsweise nach H. Schüler u. J. E. Keyston, ebenda **72**, 432, 1931. Figuren siehe bei Buhl und bei Inglis (l. c.). — [5]) S. Mrozowski, Helv. Phys. Acta **9**, 27, 1936. — [6]) Vgl. H. Schüler u. Th. Schmidt, l. c. — [7]) Außerdem könnte nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn Buhl die absolute Eichung des Magnetfeldes Fehler bis zu 1% enthalten.

weiter unten) und verlangen, daß der Abstand zwischen $B + c$ (I) und dem Isotop 202 (IV) der gleiche wie bei Mrozowski ($568 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}) sein soll. Dann ergibt sich der Umrechnungsfaktor von $\mathfrak{H}$ auf H zu 0,0700 und wir erhalten die Lagen, gerechnet von $B + c$ aus (in Einheiten 10^{-3} cm^{-1}) (Tabelle 1).

Tabelle 1.

I	$B + c$	0
II	198	221
	b	254
III	200	389
IV	202	568
V	a	718
	204	738
	A	739

Tabelle 2.

	1	2
I	0	(0)
II	231	231
III	389	389
IV	568	(568)
V	735	731

Bei den schon erwähnten Messungen von Mrozowski wurde die Struktur von λ 2537 mit einem Fabry-Perot-Interferometer und einer Lummerplatte beobachtet. Gemittelt ergeben sich die Werte der Spalte 1 in Tabelle 2. Da er als Lichtquelle keinen Quecksilberbogen, sondern Resonanzstrahlung verwendet, werden die Linien sehr scharf und die Messungen erheblich genauer als die bisher meist benutzten von Mc Nair[1]).

In Spalte 2 sind die Werte eingetragen, die sich aus der Tabelle 1 durch Bildung der Schwerpunkte ergeben. Man sieht, daß bei II und III die Übereinstimmung vollständig ist. Bei V ist die Bestimmung nach Buhl ungenau, aber auch der Wert von Mrozowski könnte hier einen etwas größeren Fehler enthalten. Wenn man als Mittelwert 733 nimmt, würde in Tabelle 1 die Linie 204 über A hinausrücken, etwa auf 742.

Zwei Bemerkungen seien noch angefügt. Mrozowski ist es kürzlich gelungen, die Hyperfeinstruktur der verbotenen Linie λ 2655,8 ($^3P_0 \rightarrow {}^1S_0$) zu bestimmen[2]). Er findet eine Isotopenverschiebung zwischen den ungeraden Isotopen von 188 ± 5. Da die Terme $^3P_0$ und $^3P_1$ dieselbe Isotopenverschiebung haben[3]), sollte λ 2537 den gleichen Wert wie λ 2655,8 zeigen.

---

[1]) Mc Nair, Phys. Rev. **31**, 986, 1928. — [2]) S. Mrozowski, ZS. f. Phys. **108**, 204, 1938. — [3]) Die Differenz der Isotopenverschiebungen von $^3P_0$ und $^3P_1$ erhält man am besten aus den Kombinationen dieser beiden Terme mit $7s\,{}^3S_1$, den Linien λ 4047 und λ 4358. Sie ist einfach gleich der Differenz der Isotopenverschiebungen dieser beiden Linien. Die beiden Verschiebungen werden von H. Schüler und E. G. Jones (ZS. f. Phys. **74**, 631, 1932) zu 32 bzw. 33 mit einer Fehlergrenze von $\pm$ 10 angegeben. Die Werte wurden deshalb nochmals nachgemessen und ergaben sich beide zu 33 Einheiten mit einer Genauigkeit von etwa $\pm$ 2 Einheiten.

In den früheren Analysen war er jedoch zu 207 bis 209 bestimmt worden. Die obigen Zahlen ergeben einen Wert von 197, der besser stimmt, obwohl die Diskrepanz immer noch reichlich groß ist.

Weiter ergibt die Rechnung mit den angegebenen Formeln, daß die Zeemankomponente $m = {}^3/_2$ der Linie b bei dem Felde 5920 Ø über die Linie I wandert. Zvironas[1]) mißt hier 5850, was wohl als brauchbare Übereinstimmung angesehen werden kann.

Herrn Mrozowski möchte ich für die Mitteilung seiner unveröffentlichten Meßergebnisse sowie für die freundliche Erlaubnis, sie hier benutzen zu dürfen, auch an dieser Stelle herzlich danken.

Der I. G.-Farbenindustrie, Werk Ludwigshafen-Oppau, bin ich für Unterstützung dankbar.

Greifswald, Physikalisches Institut der Universität. 23. Oktober 1938.

[1]) A. Zvironas, Helv. Phys. Acta **7**, 224, 1933.

Sekundärwirkungen der weichen und durchdringenden Komponente der Ultrastrahlung.

Von **B. Trumpy** in Bergen.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Oktober 1938.)

Mit Hilfe einer automatischen Wilson-Kammer, die durch vier 0,3 cm dicke Bleiplatten in fünf Sektionen aufgeteilt war, wurde die Sekundärwirkung der weichen und durchdringenden Komponente der Ultrastrahlung untersucht. Es wurde die mittlere Anzahl der Sekundärteilchen bestimmt, die ein durchgehendes Primärteilchen in den verschiedenen Sektionen begleiten. Durch Abschirmung der Kammer mit einem starken Bleifilter wurde die Sekundärwirkung der harten Komponente getrennt studiert; auf Grund der Beobachtungen mit der ungeschirmten Kammer ließ sich dann die Sekundärwirkung der weichen Komponente ungefähr berechnen. Sekundärteilchen werden von der weichen Komponente in den Bleiplatten durch einen typischen Multiplikationsprozeß gebildet, und ihre Anzahl wächst ziemlich stark mit zunehmender Dicke der Bleiplatte. Die mittlere Anzahl von Sekundärteilchen scheint mit dem nach Bhabha und Heitler berechneten theoretischen Werte in guter Übereinstimmung zu stehen. — Die harte Komponente ist in Blei von etwa 17% Sekundärteilchen begleitet, was auf Grund der Bhabhaschen Theorie den Schluß erlaubt, daß diese Strahlungskomponente aus Teilchen bestehen muß, deren Masse etwas größer ist als 100 Elektronenmassen.

1. Einleitung. In zwei früheren Publikationen haben wir die vorläufigen Resultate einiger Untersuchungen über die Sekundärwirkungen der Ultrastrahlung mitgeteilt. Die Untersuchungen wurden mit Hilfe einer automatischen Nebelkammer, die durch vier 3 mm dicke Bleiplatten in fünf Sektionen aufgeteilt war, durchgeführt. In der ersten Arbeit[1]) (1937) wurde in dieser Weise die Art der Schauerbildung untersucht, und es wurde festgestellt, daß die meisten Schauer durch einen Multiplikationsprozeß im Sinne der Theorie von Carlson und Oppenheimer[2]) und Bhabha und Heitler[3]) gebildet werden. Diese Arbeit[1]) war unabhängig von ähnlichen Untersuchungen, über die Fussel[4]) kurz berichtet hat, durchgeführt worden. Neulich sind die von Fussel gemachten Aufnahmen zum erstenmal publiziert worden; siehe Euler und Heisenberg[5]). Sie geben dasselbe Bild der Kaskadenschauer wie unsere Aufnahmen, jedoch tritt in den Fusselschen Experimenten, da die Bleiplatten dicker (0,6 bis 0,7 cm) und ihre Zahl (3) kleiner war, der Kaskadencharakter der Schauer nicht so deutlich hervor.

[1]) B. Trumpy, Det Kgl. Norske Vidensk. S. F. nr. 37, 1937. — [2]) J. F. Carlson u. J. K. Oppenheimer, Phys. Rev. **51**, 220, 1937. — [3]) H. J. Bhabha u. W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London (A) **159**, 432, 1937. — [4]) L. Fussel, Phys. Rev. **51**, 1005, 1937. — [5]) H. Euler u. W. Heisenberg, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. **7**, 1, 1938.

In einer späteren Arbeit[1]) haben wir mit derselben Versuchsanordnung eine statistische Untersuchung über die Verteilung der Zahl der Sekundärteilchen auf die verschiedenen Sektionen der Kammer durchgeführt. Über diese Untersuchungen, bei denen versucht wurde, die Sekundärwirkungen der weichen und durchdringenden Komponente getrennt zu studieren, werden wir hier näher berichten.

2. Experimentelles. Die automatische Wilson-Kammer war vom Membrantypus. Die etwa 5 cm tiefe Kammer hatte einen Durchmesser von rund 20 cm und war durch vier 0,3 cm dicke Bleiplatten in fünf Sektionen aufgeteilt. Die gesamte Stärke des Bleifilters innerhalb der Kammer betrug also 1,2 cm.

Ein Zählrohr war oberhalb, ein anderes unterhalb der Kammer angebracht; durch einen Koinzidenzstoß zwischen den beiden Rohren wurde die Kammer in Funktion gesetzt. Nur durchgehende Teilchen hoher Energie kamen in dieser Weise zur Abzählung, und der Zweck der weiteren Untersuchungen war dann, die Anzahl der Sekundärteilchen zu bestimmen, von denen diese „Primärteilchen" in den verschiedenen Sektionen begleitet waren.

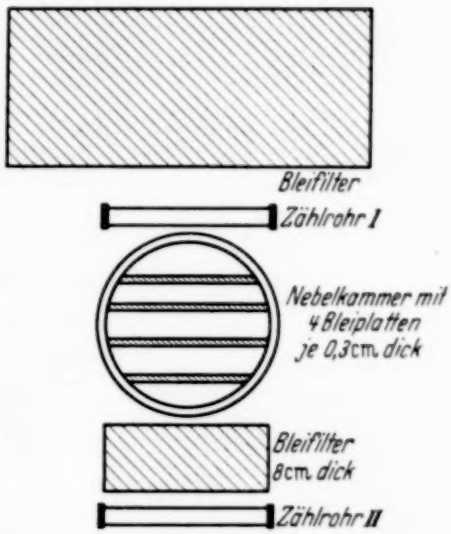


Fig. 1. Versuchsanordnung.

Es kamen also nur solche Aufnahmen in Betracht, die ein durchgehendes Teilchen zeigten. Auf diesen wurden dann die Bahnspuren der Sekundärteilchen in Sektion I, II, III und IV abgezählt. Sektion I liegt unter der ersten Bleiplatte, dann folgt II usw. In 400 bis 500 Fällen wurden in dieser Weise die Sekundärteilchen abgezählt, und zwar unter Anwendung zweier wesentlich verschiedener Versuchsanordnungen.

Erstens wurde ohne Abschirmung der Kammer gearbeitet, in welchem Falle die durchgehenden Teilchen zu ungefähr 20% der weichen und zu 80% der harten Komponente der Ultrastrahlung angehören. Zweitens wurden mit einem 19 cm dicken Bleifilter über der Kammer dieselben Untersuchungen durchgeführt. Das Filter hatte eine Länge von 45 cm und eine Breite von 28 cm. Der Öffnungswinkel der Zahlröhren war in dieser Weise gut gedeckt. Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 schematisch wiedergegeben. Um zu verhindern, daß die durch die harte Strahlung in dem Bleiklotz ausgelösten Sekundärelektronen als „Primärteilchen" gezählt

[1]) B. Trumpy, Nature **141**, 909, 1938.

wurden, war ein weiteres 8 cm dickes Bleifilter über dem unteren Zählrohr angebracht. Mit der Anordnung der Fig. 1 ist also erreicht worden, daß die registrierten durchgehenden Teilchen alle der harten Komponente angehören, während die Sekundärteilchen die zwischen den Bleiplatten beobachtet werden, von der durchdringenden Komponente wesentlich in dem oberen Bleifilter ausgelöst sein mußten. Diese Sekundärstrahlung steht wegen der erheblichen Dicke des oberen Bleifilters mit der primären harten Strahlung im Gleichgewicht.

3. Resultate. Wenn die Kammer nicht abgeschirmt ist, treffen wir in den einzelnen Sektionen der Kammer auf je 100 durchgehende Primärteilchen die folgenden Zahlen von Sekundärteilchen.

In Sektion I: 26
„ II: 35
„ III: 44
„ IV: 48

Schon die erste Betrachtung der Aufnahmen zeigt, daß ungefähr 20 bis 25% ein recht verzweigtes Bild mit einer relativ hohen Anzahl von

Fig. 2. Sekundärwirkung der weichen Strahlungskomponente.

Sekundärteilchen gaben. Es ist offenbar die weiche, stark sekundärbildende Komponente, die sich in dieser Weise äußert. Die übrigen Teilchen, die die Kammer durchqueren, geben entweder überhaupt keine sichtbare Sekundärwirkung oder sie sind nur von einer recht geringen Zahl von Sekundärspuren begleitet. Rund 31% der Partikel gehen ohne sichtbare Wirkung durch die Kammer und die vier Bleiplatten hindurch.

In Fig. 2 geben wir ein paar Aufnahmen von Strahlen mit starker Sekundärwirkung. Es handelt sich hier offenbar um Elektronen, die sich durch einen Multiplikationsprozeß sehr rasch vermehrt haben. Die erste Abbildung stellt, wie man sieht, einen typischen Multiplikationsschauer dar.

Die Versuche wurden dann mit der Anordnung der Fig. 1 wiederholt. In diesem Falle finden wir im Gegensatz zu der ersten Versuchsreihe, daß

die Zahl von Sekundärspuren in den verschiedenen Sektionen I bis IV nahezu dieselbe ist. Diese Zahl liegt bei 17% der durchgehenden Primärteilchen. Die Anzahl Primärteilchen, die ohne jede sichtbare Sekundär-

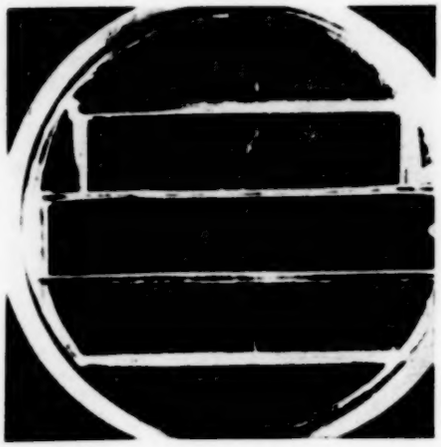


Fig. 3. Sekundärwirkung eines schweren Elektrons.

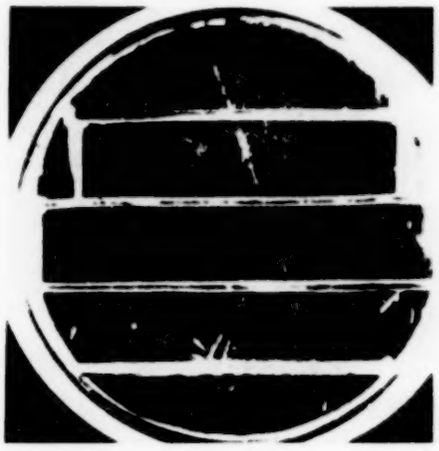


Fig. 4. Multiplikationswirkung eines schweren Elektrons.

wirkung die Kammer durchqueren, liegt in diesem Falle bei 40%.

Fig. 5. Ein Kernprozeß, der von einem schweren Elektron ausgelöst ist.

In Fig. 3, 4 und 5 sind einige Aufnahmen wiedergegeben, die die gewöhnliche Sekundärwirkung der harten Komponente der Ultrastrahlung demonstrieren. Die sekundäre Spur bildet in gewissen Fällen (Fig. 3) einen Zweig des Hauptstrahles; es können jedoch auch Elektronenpaare in einigem Abstand von diesem Strahl gebildet werden, wie aus Fig. 4 klar hervorgeht. Ein gewöhnliches Elektron, das durch die Ionisationswirkung eines harten Teilchens ausgelöst wurde, hat durch Bremsung ein unsichtbares Lichtquant gebildet, das sich später in ein Elektronenpaar umgewandelt hat. Es kann auch der Fall eintreten, daß die Sekundärteilchen stark ionisierende Kernteilchen sind. In Fig. 5 ist ein Beispiel einer einfachen Kernzertrümmerung wiedergegeben.

Bei weiteren Versuchen wurde das obere Bleifilter entfernt, während dem unteren Bleifilter eine Dicke von 12 cm gegeben wurde. Die Abzählung der Sekundärspuren zeigte, daß sie in diesem Falle in Höhe von etwa 13% in allen Sektionen vorhanden waren. Die harte Komponente erzeugt also in Luft und in dem Dach über der Kammer eine geringere Zahl von Sekundär-

teilchen als in dem Bleiklotz. In dieser Verbindung muß aber betont werden, daß die in der Luft gebildeten Zerfallselektronen mit der angewandten Versuchsanordnung nicht zur Abzählung kommen.

4. Diskussion. Unsere Experimente haben gezeigt, daß bei gleichzeitiger Abzählung der weichen und der harten Komponente der Ultrastrahlung die prozentische Anzahl der Sekundärteilchen sehr stark mit der Dicke des Bleifilters anwächst. Wenn die weiche Strahlung wegfiltriert wird, ist diese Zahl konstant und beträgt für Blei etwa 17%. Diese Zahl ist also für das Gleichgewicht in Blei zwischen der harten Strahlung und ihren Sekundärteilchen charakteristisch. Sie liegt für die Luft und das Dach bei 13%. Mit Hilfe dieser Zahl und der bekannten prozentischen Zusammensetzung der Ultrastrahlung aus weicher und harter Komponente können wir jetzt die Zahl der Sekundärteilchen ungefähr berechnen, die von der weichen Strahlungskomponente allein ausgelöst werden. Wir finden, daß bei der weichen Komponente der prozentische Anteil an Sekundärteilchen folgende Werte hat.

In Sektion	I:	64
„	II:	100
„	III:	136
„	IV:	160

Diese Tabelle gibt also die Zahl der Positronen und Elektronen an, die im Mittel durch 100 weiche „Primärteilchen" in 0,3, 0,6, 0,9 und 1,2 cm Blei ausgelöst wurden, jedoch sind die Zahlen wegen der recht kleinen Tiefe der Kammer als Minimumswerte zu betrachten. Es liegt nahe, diese Zahlen mit der Bhabha-Heitlerschen Theorie der Strahlenmultiplikation zu vergleichen. In Fig. 6 sind die Resultate der statistischen Berechnungen von Bhabha und Heitler als gestrichelte Kurven eingezeichnet. Diese Kurven geben die mittlere Zahl der Elektronen und Positronen an, in welche sich ein Elektron oder Positron verwandelt, das auf eine Bleiplatte fällt. Für verschiedene Energien des einfallenden Teilchens ist die mittlere Anzahl der Sekundärelektronen als Funktion der Dicke der Bleiplatte angegeben[1]).

Ein Vergleich unserer Resultate mit dieser Theorie kann aus mehreren Gründen nicht exakt durchgeführt werden. Erstens sind die Versuche ohne Magnetfeld ausgeführt worden, so daß die Energie der einfallenden Teilchen nicht angegeben werden kann. Zweitens gelangen in unserem Falle nur diejenigen Primärteilchen zur Abzählung, die eine 1,2 cm dicke Bleiplatte

[1]) Die theoretischen Kurven geben die Zahl der Elektronen und Positronen mit Energie $> Ej = 10^7$ Volt an. Die Zahl der Sekundären, deren Energie unterhalb der Grenze Ej liegt, ist für kleine Bleischichten verhältnismäßig gering [siehe N. Arley, Proc. Roy. Soc. London (A), im Erscheinen].

durchsetzt haben. In Fig. 6 sind unsere Versuchsresultate in der voll eingezeichneten Kurve wiedergegeben, wobei in Übereinstimmung mit den theoretischen Kurven das einfallende Teilchen mitgezählt ist. Wie man sieht, paßt die Ultrastrahlkurve gut zu den für Elektronen berechneten Kurven. Der Vergleich zeigt, daß die weiche Komponente der Ultrastrahlung aus Elektronen und Positronen bestehen muß, und daß diejenigen Elektronen, die eine 1,2 cm dicke Bleiplatte durchqueren können, eine mittlere Anfangsenergie besitzen, die etwas größer ist als $2{,}10^8$ Volt. Dies scheint auch gut mit dem Energiespektrum der weichen Strahlung zu stimmen.

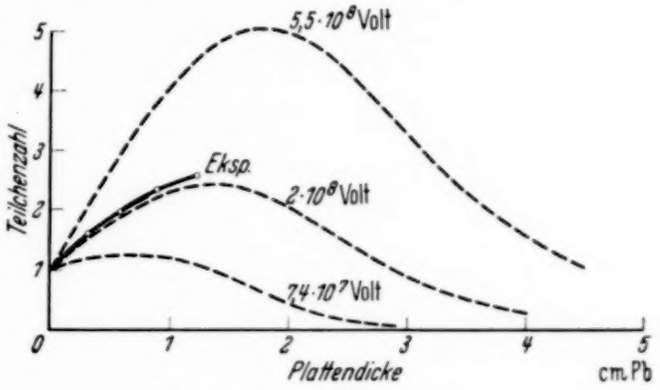


Fig. 6. Größe der Multiplikationsschauer als Funktion der Schichtdicke für verschiedene Anfangsenergien (nach Euler).

Wir wenden uns jetzt der harten Komponente zu. Es bestehen zwingende Gründe für die Annahme, daß es sich in diesem Falle weder um gewöhnliche Elektronen noch um Protonen handelt, wie z. B. von Heitler[1]) und Bhabha[2]) klargelegt wurde. Neddermeyer und Anderson[3]) haben den Schluß gezogen, daß es sich um ein noch unbekanntes Teilchen handelt, dessen Masse zwischen der des Elektrons und des Protons liegt. Durch Beobachtungen der Bahnspuren dieser „schweren" Elektronen am Ende ihrer Bahn hat man schließen können, daß die Masse dieser Teilchen wahrscheinlich etwas mehr als das 100fache der Elektronenmasse beträgt. (Siehe z. B. Euler und Heisenberg, l. c.) In einer eben erschienenen Arbeit hat Bhabha[2]) dann die Anzahl der Sekundärteilchen (Elektronen und Positronen) berechnet, die in verschiedenen Materialien von den harten Teilchen durch Ionisation und eine folgende Multiplikation gebildet werden, und die sich im Gleichgewicht mit der harten Strahlungskomponente befinden. Die Berechnungen wurden für Teilchen, deren Masse das 10-, 100- und 1840fache der Elektronenmasse beträgt, durchgeführt. Für das erstgenannte Teilchen spielt die Bremsstrahlung noch eine gewisse Rolle, bei den zwei letzten Teilchenarten kann aber dieser Prozeß nicht mehr in Betracht kommen, so daß die Sekundärstrahlen hauptsächlich der gewöhnlichen Ionisation angeschrieben werden müssen. Die sekundären Elektronen

[1]) W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London (A) **161**, 261, 1937. — [2]) H. J. Bhabha, ebenda **164**, 257, 1938. — [3]) S. H. Neddermeyer u. C. D. Anderson, Phys. Rev. **51**, 884, 1937.

können dann bei hinreichender Energie Multiplikationsprozesse einleiten (siehe Fig. 4). In Fig. 7 sind die Resultate von Bhabha schematisch wiedergegeben. Die Kurven geben die prozentuale Anzahl der sekundären Elektronen und Positronen als Funktion der Energie des einfallenden Teilchens. Sie gelten für das Gleichgewicht in Blei und für die Fälle 10, 100 und 1840 m, wo m die Elektronenmasse bedeutet. Im Falle 10 m sind die durch Strahlung gebildeten Sekundärteilchen nach den Angaben von Bhabha, mitgerechnet.

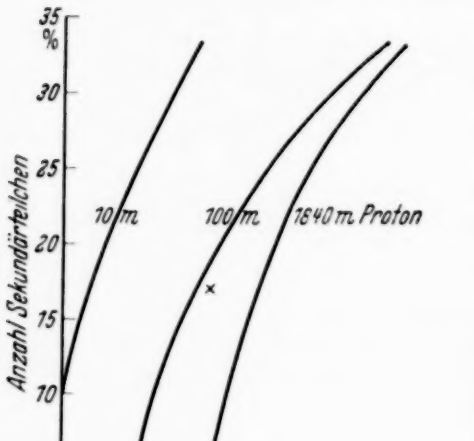


Fig. 7. Die Zahl der Sekundärteilchen, die von Primärteilchen verschiedener Masse und Energie in Blei ausgelöst werden (nach Bhabha).

Wenn wir jetzt dazu übergehen, unsere Versuchsresultate mit diesen theoretischen Daten zu vergleichen, möchten wir zuerst bemerken, daß ein solcher Vergleich nur recht grob sein kann, insbesondere deshalb, weil die Energie der einzelnen einfallenden Teilchen nicht bestimmt werden konnte. Für eine vorläufige Orientierung ist es aber hinreichend, mit einer mittleren Energie der harten Komponente etwas niedriger als 10^{10} Volt zu rechnen. Dies bedeutet, daß in Fig. 7 die experimentelle Kurve, die die Anzahl der sekundären Elektronen der harten Strahlung angibt, durch das eingezeichnete Kreuz hindurchgehen muß. Aus der Theorie von Bhabha und der Lage dieses Punktes läßt sich dann schließen, daß die Masse der harten Teilchen etwas größer sein muß als das 100fache der Elektronenmasse. Hier muß betont werden, daß einige der abgezählten Sekundärteilchen gewissen Kernprozessen zugeschrieben werden müssen. Die Anzahl der Sekundärteilchen dieser Art kann nicht genau angegeben werden. Sie muß aber verhältnismäßig klein sein, und kann den obigen Schluß nicht ändern.

Sowohl für den Fall 10 m als 1840 m (Proton) liegt die theoretisch zu erwartende Anzahl von Sekundärteilchen weit von dem experimentellen Werte entfernt. Im ersten Falle sollte man etwa 35, im letzten Falle etwa vier Sekundärteilchen erwarten. Unter keinen Umständen können aber diese Werte in Einklang mit den experimentellen Ergebnissen gebracht werden.

Bergen, Geophysikalisches Institut, im September 1938.

(Mitteilung der Studiengesellschaft f. elektr. Beleuchtung Osram-Konzern.)

Diskussion der Neon-Entladung vom Standpunkt der unvollständigen Gleichgewichte in der Säule.

Von **R. Rompe** und **M. Schön,** Berlin.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Oktober 1938.)

Im Sinne der von uns früher mitgeteilten Theorie der positiven Säule der Niederdruckentladung auf der Grundlage der „unvollständigen Gleichgewichte" werden die vorliegenden Messungen der Abhängigkeit des Gradienten und der Lichtausbeute der Neonentladung von der Stromstärke diskutiert. Wenn man von der gesamten Wirkleistung der Säule die Wirkleistung der sichtbaren und ultraroten Strahlung abzieht und die Differenz über der Elektronendichte aufträgt, sollte mit Ausnahme des Bereichs sehr kleiner Elektronendichten in erster Näherung eine Gerade zu erwarten sein, deren Neigung ein Maß für die Rekombinations- und elastischen Verluste der Säule und deren Schnitthöhe mit der Ordinaten ein Maß für die Leistung der Resonanzstrahlung ist. Die Elektronendichte wurde im Sinne der Langevinschen Formel dem Quotienten: Stromstärke durch Gradient proportional gesetzt. Bei etwa 80 v. H. der Messungen wurde die lineare Abhängigkeit gefunden.

In einer vorangegangenen Arbeit (I)[1]) haben wir gezeigt, daß viele bisher unverständliche Eigenschaften von Niederdruck-Gasentladungen zwanglos ihre Erklärung finden durch einen Säulenmechanismus, bei dem mit wachsender Leistung pro cm eine Annäherung der einzelnen Energieformen der Säule an Gleichgewichtswerte stattfindet. Wir wollen dieses Verhalten kurz als „unvollständige Gleichgewichte in der Säule" bezeichnen.

Wir sind in (I) von der Tatsache ausgegangen, daß die von der positiven Säule nach außen in Form von Strahlung und Wärme abgegebene Leistung, die „Wirkleistung", den Betrag des Gradienten bestimmt, und daß die von außen der Säule zugeführte elektrische Leistung zunächst auf das Elektronengas übertragen wird. Die Elektronen übertragen dann durch Stöße (elastische und unelastische) die Energie auf die einzelnen Energieformen der Atome. Die gesamte in der Zeiteinheit durch Elektronenstöße auf das Plasma übertragene Energie bezeichnen wir als „Gesamtleistung". Die einzelnen Energieformen der Säule geben durch bestimmte Elementarprozesse (Emission von Strahlungsquanten, Rekombination von Ionen und Elektronen an der Wand), sowie durch Wärmeleitung Energie nach außen ab.

[1]) R. Rompe u. M. Schön, ZS. f. Phys. **108**, 265, 1938.

Durch andere Elementarprozesse hingegen wird wiederum Energie auf das Elektronengas rückübertragen. Die in der Zeiteinheit rückübertragene Energie nennen wir „Blindleistung", und es gilt die Beziehung: Wirkleistung = Gesamtleistung — Blindleistung. Wir können nun die Elementarprozesse, die sich im Plasma abspielen, dadurch zu Elementarprozeßzyklen ordnen, daß wir jeweils die Prozesse zusammenfassen, die zur Bildung oder Vernichtung eines bestimmten Zustandes innerhalb des Plasmas beitragen, und für jeden Zustand die Leistungsbilanz aufstellen. Sie besteht aus Gliedern, die die Häufigkeit der zugehörigen Elementarprozesse und die beim Elementarprozeß übertragene Energie enthalten. Als Energieformen des Plasmas sind die verschiedenen Anregungszustände der Atome, ihre mittlere kinetische Energie und die Konzentration der Ionen zu betrachten, wobei man zwischen dem ersten und den höheren angeregten Zuständen zu unterscheiden hat. Die Leistungsgleichungen enthalten außer der durch Elektronenstöße zugeführten Leistung und dem Anteil des Zustandes an der Wirkleistung als wesentliches Glied den Anteil an der „Blindleistung", der aus den „inversen Prozessen" besteht, deren Berücksichtigung wegen des zweiten Hauptsatzes erforderlich ist (Prinzip des detaillierten Gleichgewichtes). Das Verhältnis der inversen Prozesse zu den Wirkprozessen ist ein direktes Maß für die Angleichung z. B. der „Teiltemperatur" eines Zustandes an die Elektronentemperatur. Die Abhängigkeit der Teilleistungen lassen sich grundsätzlich als Funktion der Elektronendichte berechnen. Für ein vereinfachtes Modell der Edelgasniederdruckentladung wurden die Rechnungen durchgeführt.

Wir wollen in dieser Arbeit den Versuch machen, gewisse experimentell zugängliche Folgerungen unserer Auffassung an Hand des für die Neon-Entladung vorliegenden Beobachtungsmaterials zu prüfen. Die Neon-Niederdruckentladung ist sicher die am besten experimentell erforschte. Es existieren einmal die zuverlässigen Gradientenmessungen von Lompe und Seeliger[1]), Krefft und Seitz[2]), ferner Bestimmungen der Elektronentemperatur von Seeliger und Hirchert[3]); schließlich sind Lichtausbeuten von Arndt[4]), Krefft und Seitz gemessen worden. Aus diesen Messungen sind bekannt:

Die Abhängigkeit der Wirkleistung von Stromstärke und Druck, sowie die Abhängigkeit der Wirkleistung der sichtbaren Strahlung von Strom-

---

[1]) A. Lompe u. R. Seeliger, Ann. d. Phys. (5) **15**, 300, 1932. — [2]) H. Krefft u. E. O. Seitz, ZS. f. techn. Phys. **15**, 556, 1934, sowie unveröffentlichte Messungen. — [3]) R. Seeliger u. R. Hirchert, Ann. d. Phys. (5) **11**, 817, 1931. — [4]) W. Arndt, Licht und Lampe **21**, 19—22, 1932.

stärke und Druck. Wir wollen im folgenden zeigen, daß sich aus diesen Messungen im Rahmen unserer Vorstellungen durch eine geeignete Auswertung der Gradientenmessungen eine sehr einfache Darstellung der Leistungsbilanz der Neonentladung ergibt.

Wie wir in (I) gezeigt haben, bestehen für die wichtigsten Wirkleistungen der einzelnen Energieformen einfache Abhängigkeiten von der Elektronenkonzentration. Diese sind:

$$L_W = \text{const} \tag{1}$$

für Energieformen, für die das detaillierte Gleichgewicht schon weitgehend erfüllt ist, d. h. eine Angleichung der „Teiltemperatur" an die Elektronentemperatur und damit eine „Sättigung" eintritt und

$$L_W \sim N_e \tag{2}$$

für Energieformen, für die die Wechselwirkung mit der Umgebung und die Wirkleistung so groß ist, daß selbst bei großen Stromstärken eine Annäherung an das detaillierte Gleichgewicht nicht eintritt. Zu den Energieformen, die der Beziehung (1) gehorchen, gehört, wie wir in (I) gezeigt haben, die Emission aus dem ersten angeregten Zustand bei nicht zu niedrigen Werten der Elektronenkonzentration, für (2) kann man die Wärmeentwicklung durch elastische Stöße, die Rekombinationsverluste an der Wand oder die Emission der Resonanzstrahlung bei niedrigen Werten der Elektronendichte anführen. (Abhängigkeiten von der Form: $L_W \sim N_e^2$ spielen, wie man aus der durchweg fallenden Charakteristik der betrachteten Entladung sieht, in unserem Fall keine Rolle).

Um an Hand des vorliegenden experimentellen Materials zu einer Darstellung als Funktion der Elektronenkonzentration zu gelangen, müssen wir den Zusammenhang zwischen Elektronendichte N_e und Stromstärke kennen. Wir setzen:

$$N_e = \frac{J}{e \cdot b \cdot G \cdot \pi r^2}, \tag{3}$$

wobei b die Elektronenbeweglichkeit ist. Wir wollen annehmen, daß die Beweglichkeit unabhängig ist von G, also etwa die Langevinsche Form besitzt. Vorweg können wir bemerken, daß sich diese Annahme innerhalb des untersuchten Druck- und Stromstärkebereiches bestätigt.

Wir tragen nun die gesamte Wirkleistung $L_W = J \cdot G$ in Abhängigkeit von N_e, d. h. J/G auf, desgleichen die ebenfalls gemessene Wirkleistung der sichtbaren Strahlung L_{Ws}. Es zeigt sich hierbei, daß $\frac{\mathrm{d}L_{Ws}}{\mathrm{d}(J/G)}$ mit wachsendem J/G rasch abnimmt, in unserem Meßbereich jedoch noch

nicht 0 wird. Wir ersehen daraus, daß die Besetzungszahlen der Ausgangsterme der sichtbaren Emission sich noch keineswegs durch die Elektronentemperatur nach der Beziehung:

$$\frac{N_1}{N_0} = e^{-\frac{\varepsilon}{T_e}} \tag{4}$$

(T_e Elektronentemperatur) berechnen lassen, da der beim detaillierten Gleichgewicht auftretende und durch $\frac{\mathrm{d}L_{Ws}}{\mathrm{d}(J/G)} = 0$ gekennzeichnete Sättigungszustand noch nicht erreicht ist. Die Abnahme von $\frac{\mathrm{d}L_{Ws}}{\mathrm{d}(J/G)}$ mit wachsendem J/G zeigt jedoch bereits die Zunahme der inversen Prozesse, mithin also eine Annäherung an das Gleichgewicht (4) an. Diese Energieform befindet sich demnach in einem Übergangsstadium zwischen (1) und (2), so daß wir sie nicht zur Bestätigung dieser Beziehungen ausnutzen können.

Nach Abziehen der Leistung der sichtbaren Strahlung enthält die Säule im wesentlichen nur noch folgende Energieformen:

1. Resonanzstrahlung,
2. Ionisationsenergie,
3. Kinetische Energie der Neon-Atome.

Über diese drei Energieformen lassen sich im Rahmen unserer Vorstellung genaue Angaben machen.

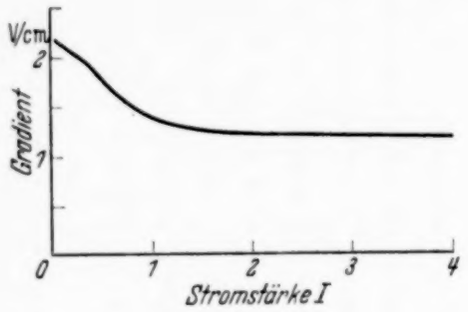
1. Die Resonanzstrahlung ist bei den vorliegenden Drucken mit Sicherheit infolge der intensiven Reabsorption und der Häufigkeit der Stöße 2. Art in dem durch Gleichung (1) angegebenen Zustand. Einen experimentellen Beweis dafür ergeben die Messungen von Kopfermann und Ladenburg[1]). Ihre Wirkleistung in Abhängigkeit von N_e bleibt also konstant.

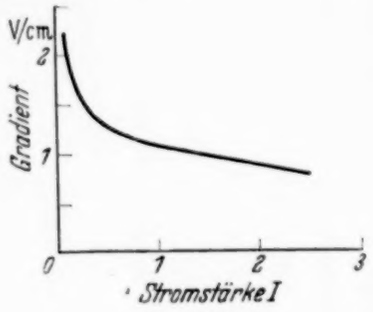
2. Die Wärmeentwicklung (kinetische Energie der Neonatome) durch elastische Stöße ist mit Sicherheit im Zustand (2); hierfür ist ein direkter Beweis in der großen Differenz zwischen Elektronentemperatur und der Gastemperatur zu erblicken. Ihre Wirkleistung nimmt mit N_e linear zu.

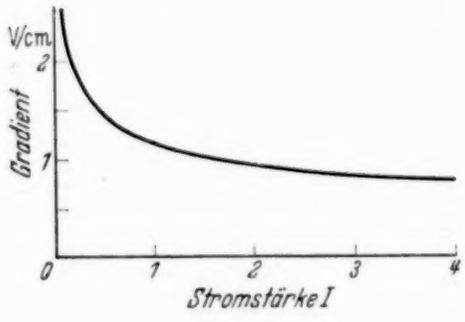
3. Für die Ionisationsenergie gilt dasselbe wie für die kinetische Energie der Neonatome. Ein direkter Beweis hierfür ist die bekannte Tatsache, daß bei einem Druck von 1 Torr und einer Elektronentemperatur von $\sim 20000^0$ normale Ne-Atome noch in überwiegender Anzahl vorhanden sind. (Im thermischen Gleichgewicht würde das Verhältnis N_{ion} zu N_{atome} bei 20000^0 und 1 Torr $\approx 20:1$ sein!) Wir können also annehmen, daß die Größe

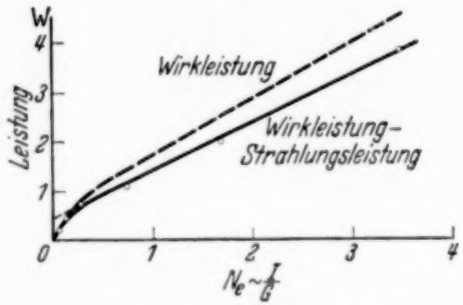
---

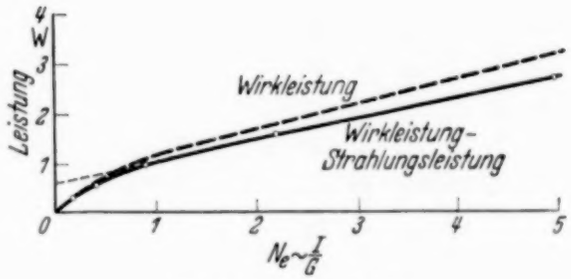
[1]) H. Kopfermann u. R. Ladenburg, ZS. f. Phys. **65**, 167, 1930; Naturwiss. **19**, 513, 1931.











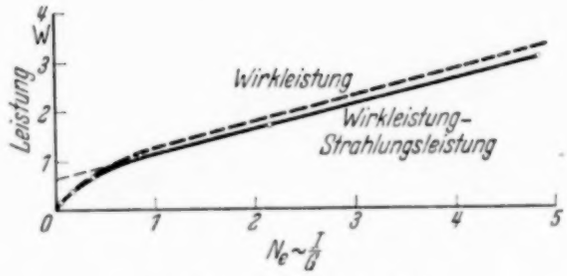


Fig. 1. $p_{\text{Neon}} = 0{,}7$ Torr.

Fig. 2. $p_{\text{Neon}} = 3$ Torr.

Fig. 3. $p_{\text{Neon}} = 7{,}5$ Torr.

Fig. 1 bis 3. Abhängigkeit des Gradienten von der Stromstärke (oberer Teil) und der Leistung von der Elektronendichte ($\sim J/G$) (unterer Teil) in der Neonentladung. Rohrdurchmesser 28 mm.

------ **Wirkleistung der Säule.**

—— **Wirkleistung—Leistung der sichtbaren und ultraroten Strahlung.**

$L_W - L_{Ws}$ hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von N_e einen linearen Verlauf hat, und daß dieser, falls unsere Annahme hinsichtlich der Beweglichkeit zutrifft, auch für die Abhängigkeit von J/G gilt. Es muß demnach für den Zusammenhang von $L_W - L_{Ws}$ und J/G bei konstantem Druck und Rohrradius gelten:

$$L_W - L_{Ws} = a + b \cdot \frac{J}{G}, \tag{5}$$

wobei a und b Konstanten sind; a ist die Leistung, die für höhere Werte von J/G die Säule in Form von Resonanzstrahlung verläßt.

Die Fig. 1 bis 3 zeigen das Ergebnis der Auswertung. Insgesamt ist unsere Vorhersage bei 80% der untersuchten Fälle erfüllt und somit die Grundlage unserer Theorie — innerhalb des untersuchten Druck- und Stromstärkebereichs — für Neon sichergestellt.

Gleichzeitig ergibt sich hieraus, daß die Darstellung der Gradientenmessungen in der üblichen Form (Gradient über Stromstärke) durch die den Vorgängen in der Säule besser angepaßte und leichter auszuwertende Darstellung: Leistung (= Gradient · Stromstärke) über der Elektronenkonzentration zu ersetzen ist. Dabei ist in dem offenbar sehr weiten Gültigkeitsbereich der Langevinschen Beziehung die Elektronenkonzentration bei konstantem Rohrradius dem Quotienten: Stromstärke durch Gradient proportional.

Neutronen der kosmischen Ultrastrahlung.

Von **Erwin Fünfer.**

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. Oktober 1938.)

Im Anschluß an frühere Versuche des Verfassers, die zum Nachweis von langsamen Neutronen in der Atmosphäre geführt haben, wird die Höhenabhängigkeit des Effektes untersucht und ein außerordentlich starker Anstieg mit der Höhe gefunden. Damit ist der Zusammenhang mit der kosmischen Ultrastrahlung gesichert. Es wird außerdem gezeigt, daß die Neutronenintensität von Materialien abhängig ist, die sich in der Umgebung des Zählrohrs befinden.

A. Einleitung und Apparatur. Im letzten Jahre hat der Verfasser über Versuche berichtet[1]), die zum Nachweis von langsamen Neutronen in der Atmosphäre führten. Ein großes Proportionalzählrohr, das innen mit einer Borschicht ausgekleidet war, ergab hinter einem allseitigen Panzer von Borax weniger Teilchen als im unabgeschirmten Zustand. Dieses Verhalten zeigte das Vorhandensein langsamer Neutronen, die auf dem Wege über die $B_{10}\,(n, \alpha)\,Li_7$-Umwandlung vom Proportionalzählrohr gezählt wurden. Durch den Boraxpanzer werden langsame Neutronen praktisch vollkommen absorbiert, wie ein Versuch mit einer Rn-Be-Quelle zeigte. Durch Kontrollmessungen außerhalb wurde festgestellt, daß diese Neutronen nicht durch die im Institut vorhandenen radioaktiven Präparate erzeugt werden. Ebenso war es auf Grund einfacher Überlegungen mit ziemlicher Sicherheit möglich, den Gehalt der umgebenden Materie an radioaktiven Substanzen als Ursprung dieser Neutronenstrahlung auszuschließen.

Obwohl so ein Zusammenhang der beobachteten Neutronen mit der kosmischen Ultrastrahlung sehr wahrscheinlich gemacht war, so waren natürlich zur endgültigen Sicherung dieser Tatsache zunächst Messungen über die Beeinflussung der Strahlungsintensität durch umgebende Materie und besonders über die Abhängigkeit von der Höhe nötig, die nun unternommen worden sind. Inzwischen hat auch Schopper[2]) langsame Neutronen in borhaltigen photographischen Emulsionen gefunden. Der Anstieg mit der Höhe ist jedoch bei ihm sehr gering.

Die schon früher verwendete Apparatur wurde im Prinzip beibehalten und leicht mitführbar gestaltet. Das Proportionalzählrohr besaß einen Durchmesser von 8 cm, eine Länge von 50 cm und war mit Argon gefüllt.

[1]) E. Fünfer, Naturwissensch. **25**, 235, 1937. — [2]) E. Schopper, ebenda **25**, 557, 1937.

Der Proportionalverstärker wurde vollständig auf Batteriebetrieb umgestellt und mit dem Zählrohr zu einem Aggregat zusammengebaut. Als Hochspannungsquelle fanden zwei Pertrix-Anodenbatterien von je 540 Volt Spannung Verwendung. Die Registrierung der Teilchen erfolgte mit einem automatischen Zählwerk von kleinem Strombedarf nach Regener. Durch eingehende Messungen wurde die Apparatur auf konstantes Arbeiten geprüft. Während der drei Monate, die die Versuche andauerten, hat sich an den Zählbedingungen nichts geändert.

B. Beeinflussung durch Materie. Schon in der ersten Mitteilung wurde gezeigt, daß eine Verminderung der Neutronenintensität auftritt, wenn statt hinter einer Betondecke hinter dreien gemessen wird. Dieser Umstand schließt die Möglichkeit, daß die Neutronen von natürlich radioaktiven Substanzen der Umgebung erzeugt werden, weitgehend aus. Um Materialeinflüsse zu untersuchen, wurde die Apparatur unter freiem Himmel auf der Plattform des Institutsturms aufgebaut. Die Ergebnisse zeigen die Tabellen 1a und 1b.

Tabelle 1a.

	Im Zimmer hinter einer Betondecke		
	allseitig Borax	Zähler unbedeckt	Zähler mit 4 cm Paraffin
Teilchen/Minute	$9{,}2 \pm 0{,}1$	$10{,}48 \pm 0{,}12$	$10{,}5 \pm 0{,}1$
Neutronen/Minute	—	$1{,}28 \pm 0{,}16$	$1{,}3 \pm 0{,}14$

Tabelle 1b.

	Auf der Plattform des Institutsturms				
	allseitig Borax	Zähler unbedeckt	Über dem Zähler		
			1 cm Paraffin	4 cm Paraffin	2 cm Holz
Teilchen/Minute	$9{,}15 \pm 0{,}05$	$9.8 \pm 0{,}08$	$10{,}45 \pm 0{,}1$	$10{,}4 \pm 0{,}1$	$10{,}42 \pm 0{,}07$
Neutronen/Minute	—	$0{,}65 \pm 0{,}1$	$1{,}3 \pm 0{,}12$	$1{,}25 \pm 0{,}12$	$1{,}27 \pm 0{,}09$

Die Tabelle 1a gibt zunächst zum Vergleich die Messungen im Zimmer wieder. Eine Beeinflussung des Effektes durch über den Zähler geschichtetes Paraffin läßt sich nicht feststellen. In der zweiten Spalte der Tabelle 1b steht das Ergebnis der Messung mit unbedecktem Zähler im Freien. Es zeigt sich eine sehr deutliche Abnahme der Neutronenintensität gegenüber der Messung im Zimmer. Überraschend ist jedoch die Tatsache, daß diese Abnahme bereits durch 1 cm Paraffin über dem Zähler wieder kompensiert werden kann (Spalte 3). Die Abmessungen der Paraffinschicht, die dicht über dem Zählrohr lag, waren 25×60 cm. Eine weitere Steigerung der

Intensität durch Vergrößerung der Paraffinschicht ist, wie Spalte 4 zeigt, nicht möglich. Die Messungen wurden noch bis zu Wasserschichten von 45 cm Dicke über dem Zähler fortgesetzt, ohne daß eine meßbare Änderung der Neutronenintensität eintrat. Den gleichen Effekt (Spalte 5) bringt eine dünne Holzschicht hervor, nicht dagegen eine Bleischicht von 2 cm Dicke.

Die eben beschriebenen Versuche sind nur vorbereitender Art gewesen, um über Materialeinflüsse im allgemeinen für die Höhenmessungen orientiert zu sein. Zu weiteren Untersuchungen reicht die mit der jetzigen Apparatur erreichbare Intensität in Gießen nicht aus. Eingehende Messungen über diese wichtigen Zusammenhänge sind jedoch mit einer Apparatur gesteigerter Empfindlichkeit in Gang gesetzt worden. Der Effekt hängt jedenfalls in starkem Maße von dem Vorhandensein von Materie in der Umgebung ab. Die Tatsache, daß schon 1 cm Paraffin zur Sättigung ausreicht, läßt es aber als unwahrscheinlich erscheinen, daß man es hier mit der Abbremsung schneller, von oben einfallender Neutronen in wasserstoffhaltigen Substanzen zu tun hat. Es soll daher bis zur weiteren Klärung durch die angefangenen Versuche nur die Vermutung ausgesprochen werden, daß hier möglicherweise ein neuartiger Sekundäreffekt einer Komponente der Ultrastrahlung vorliegt, bei dem Neutronen geringer Energie entstehen. Kernverdampfprozesse, wie sie von Blau und Wambacher[1]) in der photographischen Platte beobachtet wurden, sind hier in hohem Maße in Betracht zu ziehen.

C. Höhenmessungen. Die Höhenmessungen wurden unternommen, um den Zusammenhang mit der kosmischen Ultrastrahlung endgültig sicherzustellen. Sie wurden ausgeführt auf dem Hoherodskopf im Vogelsberg (780 m), dem Feldberg im Schwarzwald (1300 bis 1500 m) und der Zugspitze (2650 m). Aus technischen Gründen wurden nur 2 Meßpunkte jeweils ausgeführt: Bei dem einen befand sich das Zählrohr unabgeschirmt in einem Holzverschlag von 1,5 bis 2 cm Dicke, die zur Sättigung nach den Messungen in Gießen (vgl. Abschnitt B) ausreicht; bei dem anderen wurde der Zähler allseitig mit 0,6 cm dicken Boraxplatten abgeschirmt. In Tabelle 2 sind die Resultate sämtlicher Messungen vereinigt.

Spalte 1 und 2 der Tabelle stellen die minütlichen Teilchenzahlen der beiden Meßpunkte dar, während die dritte Spalte die als Differenz dieser Zahlen gewonnene Neutronenintensität in den verschiedenen Höhen enthält. Aus den Spalten 2 und 3 ist eine außerordentlich starke Zunahme der Neutronenintensität mit der Höhe zu entnehmen. Daß auch die Zahlen der

[1]) M. Blau u. H. Wambacher, Nature **140**, 585, 1937.

Tabelle 2.

	Borax allseitig	1,5–2 cm Holz allseitig	Neutronen pro Minute
Gießen 160 m	9,15 ± 0,05	10,42 ± 0,07	1,27 ± 0,09
Hoherodskopf 780 m . . .	9,2 ± 0,3	11,3 ± 0,2	2,1 ± 0,36
Feldberg 1280 m	9,0 ± 0,3	12,2 ± 0,13	3,2 ± 0,3
Feldberg 1500 m	—	13,4 ± 0,15	4,2 ± 0,2
Zugspitze 2650 m	10,0 ± 0,18	19,8 ± 0,18	9,8 ± 0,25

Spalte 1 eine leichte Zunahme zeigen, rührt sicher davon her, daß die beiden Stirnseiten des Zählrohrs nicht mit Borax abgeschirmt waren. Die Zunahme ist viel größer, als man sie vom Gesamtgemisch der kosmischen

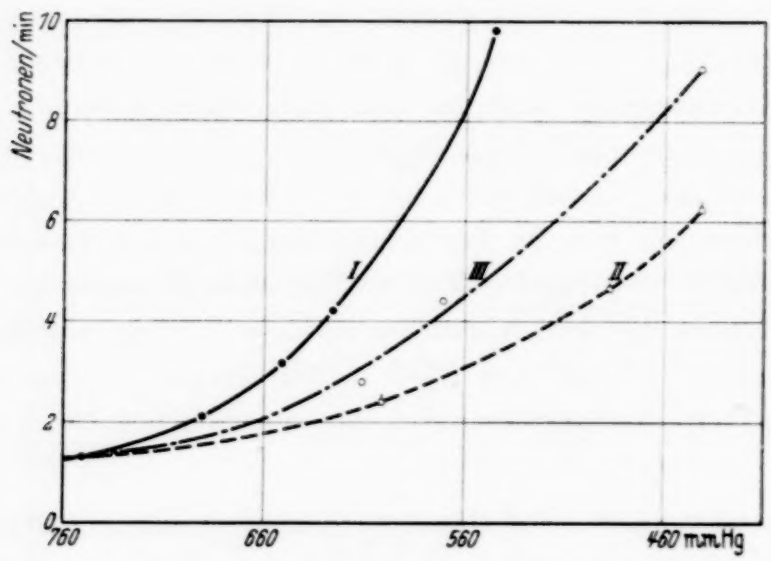


Fig. 1.
Kurve I: Anstieg der Neutronenintensität.
Kurve II: Anstieg der Gesamtintensität der kosmischen Strahlung nach Messungen mit der Ionisationskammer in willkürlichen Einheiten.
Kurve III: Anstieg der Schauertätigkeit nach Koinzidenzmessungen in willkürlichen Einheiten.

Strahlung her kennt. In der Fig. 1 ist als Kurve I der bei unseren Versuchen gemessene Intensitätsverlauf der Neutronen als Funktion des Luftdrucks aufgetragen. Zum Vergleich ist eine Kurve II beigegeben, die den Intensitätsverlauf der gesamten kosmischen Strahlung nach Messungen von Bowen, Millikan und Neher[1]) zeigt, und eine Kurve III, die den Intensitätsverlauf der Ultrastrahlungsschauer mit der Höhe nach Koinzidenzmessungen von Johnson[2]) wiedergibt.

Durch die starke Höhenabhängigkeit des Neutroneneffektes ist zunächst gesichert, daß es sich um einen Bestandteil der kosmischen Strahlung

[1]) I. S. Bowen, R. A. Millikan u. H. V. Neher, Phys. Rev. **44**, 246, 1933. — [2]) Th. H. Johnson, ebenda **47**, 318, 1935.

handelt. Darüber hinaus ist aber festzustellen, daß es sich hier um einen Strahlungsanteil handelt, der sich anders verhält als die Gesamtstrahlung und die schauererzeugende Strahlung. Denn sowohl die Kurve der Gesamtstrahlung als auch die Kurve der Schauertätigkeit zeigt einen wesentlich schwächeren Anstieg mit der Höhe. Nur die Häufigkeit der Hoffmannschen Stöße scheint nach Messungen von C. G. und D. D. Montgomery[1]) einen ähnlich starken Anstieg zu zeigen.

Die Messungen des Abschnitts B legen die Annahme nahe, daß die gemessenen Neutronen durch Sekundärprozesse einer Komponente der kosmischen Strahlung entstehen. Unter der Voraussetzung, daß die Neutronenzahl ein Maß für die Intensität der auslösenden Strahlung ist, was z. B. bei Kernverdampfprozessen sicher zutreffen dürfte, läßt sich dann ein Absorptionskoeffizient für diese Komponente aus der gemessenen Höhenkurve berechnen. In logarithmischer Darstellung ergibt die Kurve eine gute Gerade, die zu einem Absorptionskoeffizienten von 0,1 cm^{-1} Hg führt. Dieser Wert steht in bemerkenswerter Übereinstimmung mit dem für die weiche Komponente der Ultrastrahlung gefundenen Absorptionskoeffizienten nach Pfotzer[2]), der aus der Analyse der mit der Koinzidenzmethode gemessenen Höhenkurve den Wert 0,115 cm^{-1} Hg findet. Man muß jedoch bei solchen Kombinationen vorsichtig sein, solange die Natur dieses neuen Effektes nicht geklärt ist. Nehmen wir an, daß es sich um einen Sekundäreffekt einer Komponente der Gesamtstrahlung handelt, so wird die Höhenabhängigkeit je nach der Meßmethode verschieden aussehen können. Die Energie der Komponente wird in verschiedenartigen Sekundärprozessen aufgebraucht, deren Häufigkeit in verschiedener Weise von der Primärenergie abhängt. Greifen wir nun durch unsere Meßmethode, wie es hier geschehen ist, einen bestimmten Sekundärprozeß zum Nachweis der Komponente heraus, so wird sich die Höhenabhängigkeit anders darstellen als dann, wenn zur Messung z. B. die Primärionisation herangezogen worden wäre. Darauf hat besonders Swann[3]) zur Deutung der Höhenabhängigkeit der Schauer hingewiesen. Eine solche selektiv ansprechende Meßmethode läßt aber die Hoffnung bestehen, daß es möglich sein wird, mit ihrer Hilfe das Strahlungsgemisch der Ultrastrahlung weiter zu zerlegen und getrennt zu erforschen.

Zusammenfassung. Im Anschluß an frühere Versuche des Verfassers, die zum Nachweis von langsamen Neutronen in der Atmosphäre führten,

[1]) C. G. u. D. D. Montgomery, Phys. Rev. **47**, 429, 1935. — [2]) Georg Pfotzer, ZS. f. Phys. **102**, 41, 1936. — [3]) F. G. Swann, Phys. Rev. **46**, 828, 1934.

wird untersucht, inwieweit Materialien in der Umgebung des Neutronenzählrohrs die Zahl der gemessenen Neutronen beeinflussen. Es wird ein starker, in seinen Einzelheiten aber noch nicht geklärter Einfluß festgestellt.

Durch Messungen in verschiedenen Höhen über dem Meeresniveau wird ein außerordentlich starker Anstieg der Neutronenintensität mit der Höhe gefunden und so der Zusammenhang mit der kosmischen Ultrastrahlung gesichert. Es ergab sich z. B. in 2650 m Höhe fast die achtfache Intensität gegenüber 160 m Höhe. Dieser Anstieg ist stärker als man ihn von der Gesamtintensität der kosmischen Ultrastrahlung und auch der Schauertätigkeit her kennt.

Die vorliegenden Versuche sind durch ein Sachkosten-Stipendium der William G. Kerckhoff-Stiftung in Bad Nauheim ermöglicht worden, der ich dafür zu tiefem Dank verpflichtet bin. Ebenso danke ich der Direktion der Bayrischen Zuspitzbahn A.-G. in Garmisch für eine Fahrpreisermäßigung und der Direktion des Schneefernerhauses für die bereitwillige Unterstützung, die sie mir zuteil werden ließ.

Gießen, Physikalisches Institut der Universität.

Über die Ablenkfehler von elektrischen und magnetischen Ablenksystemen.

Von **Walter Glaser** in Prag.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 10. September 1938.)

Die im Kathodenstrahloszillographen auftretenden Ablenkfehler werden in Abhängigkeit von der Gestalt des Ablenkfeldes bestimmt und diskutiert.

An die Ablenkung des Kathodenstrahles in Braunschen Röhren stellt man folgende grundsätzliche Forderungen:

1. Die Ablenkung soll streng proportional sein der Ablenkspannung bzw. — bei magnetischer Ablenkung — dem Ablenkstrom.

2. Der Schreibfleck, welcher im unabgelenkten Zustande „punktförmig" ist, soll auch im abgelenkten Zustande punktförmig bleiben.

Beide Forderungen lassen sich in der Praxis bei größeren Ablenkungen nicht streng verwirklichen, sondern es treten sowohl Abweichungen von der Proportionalität, wie auch Fleckverzerrungen auf. Man wird sich daher fragen: Wie lassen sich die einzelnen Ablenkfehler einteilen, wie hängen sie von den Eigenschaften der ablenkenden Felder ab und wie hat man schließlich diese zu gestalten, damit die Fehler möglichst klein werden. Die folgende Arbeit befaßt sich mit der Kennzeichnung und Berechnung der Ablenkfehler eines Ablenksystems, bei welchem im allgemeinsten Falle elektrostatische und magnetische Ablenkung gleichzeitig vorhanden sein können. Zunächst wird die allgemeine Gestalt eines elektrischen und magnetischen Ablenkfeldes berechnet. Dann werden die Bewegungsgleichungen der Elektronen für das berechnete Feld aufgestellt, mit ihrer Hilfe die einzelnen Ablenkfehler bestimmt und schließlich die durch sie bedingte Veränderung der Ablenkung und des Schreibfleckes kurz diskutiert.

Über die Ablenkfehler liegen unseres Wissens bis jetzt nur zwei kurze Arbeiten vor, welche im Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen entstanden sind. Eine experimentelle von Deserno[1]) und eine theoretische von Walraff[2]). Beide behandeln einen Spezialfall, auf den wir weiter unten zu sprechen kommen[3]). Gleichzeitig mit dieser

---

[1]) P. Deserno, Arch. f. Elektrotechn. **29**, 139, 1938. — [2]) A. Walraff, ebenda **29**, 351, 1938. — [3]) Inzwischen ist eine ausführliche Arbeit von A. Recknagel über den Ablenkkondensator (ZS. f. Phys. **111**, 61, 1938) erschienen. (Zusatz bei der Korrektur am 6. November 1938.)

Arbeit und von ihr unabhängig erscheint eine Behandlung der magnetischen Ablenkfehler von Wendt, in welcher nach einer etwas anderen Methode die magnetischen Ablenkfehler bestimmt, ausführlich diskutiert und auch experimentell nachgewiesen werden.

1. Das elektrische Ablenkfeld.

Das elektrische Ablenksystem wird durch zwei einander gegenüberstehende Platten nach Art der Fig. 1 gebildet. Wie man der Figur unmittelbar entnehmen kann, wird das elektrische Feld folgende Symmetrieeigenschaften besitzen:

$$\left.\begin{aligned} E_x(x,y) &= -E_x(-x,y); \quad E_x(x,y) = E_x(x,-x),\\ E_y(x,y) &= E_y(-x,y); \quad E_y(x,y) = E_y(x,-y),\\ E_z(x,y) &= E_z(-x,y); \quad E_z(x,y) = -E_z(x,-y). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ist $\varphi(x,y,z)$ das elektrische Potential, so gilt wegen

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{2}$$

auf Grund von (1)

$$\varphi(x,y) = \varphi(-x,y); \quad \varphi(x,y) = -\varphi(x,-y). \tag{3}$$

Dies erfordert für das Potentialfeld des Ablenkkondensators den Ansatz

$$\varphi = \Phi_{01}\,y + \Phi_{21}\,x^2\,y + \Phi_{03}\,y^3 + \Phi_{41}\,x^4\,y + \Phi_{23}\,x^2\,y^3 + \Phi_{05}\,y^5 + \cdots, \tag{4}$$

wobei $\Phi_{01}\cdots$ bestimmte Funktionen von z darstellen. Das Potential muß nun der Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

genügen. Wenn man sich in (4) auf die Glieder dritter Ordnung beschränkt, folgt daraus

$$\Phi_{10}'' + 2\Phi_{21} + 6\Phi_{03} = 0. \tag{6}$$

Die „ablenkende" Y-Komponente E_y des Feldes lautet nach (4) und (2)

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\Phi_{01} - \Phi_{21}\,x^2 - 3\Phi_{03}\,y^2\ldots \tag{7}$$

Setzt man $-\Phi_{01} = E_0$ und $-\Phi_{21} = \frac{1}{2}E_2$, so erhält man auf Grund von (6)

$$3\Phi_{03} = \tfrac{1}{2}(E_0'' + E_2),$$

so daß die Y-Komponente E_y gegeben ist durch

$$E_y = E_0 + \tfrac{1}{2}E_2\,x^2 - \tfrac{1}{2}(E_0'' + E_2)\,y^2 + \cdots, \tag{8}$$

wobei die Punkte Glieder vierter und höherer Ordnung andeuten.

Das gesuchte Potential mit den Symmetrieeigenschaften (2) ist also durch folgende Gleichung gegeben:

$$q = -E_0\, y - \tfrac{1}{2} E_2\, x^2\, y + \tfrac{1}{6}\,(E_0'' + E_2)\, y^3 + \cdots, \tag{9}$$

wobei die Koeffizienten E_0 und E_2 ihre Bedeutung durch das als gegeben zu betrachtende Ablenkfeld E_y von Gleichung (8) erhalten. In Gleichung (9) sollen die Punkte Glieder fünfter und höherer Ordnung andeuten.

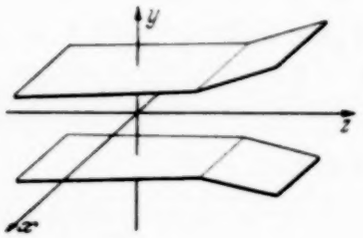


Fig. 1.

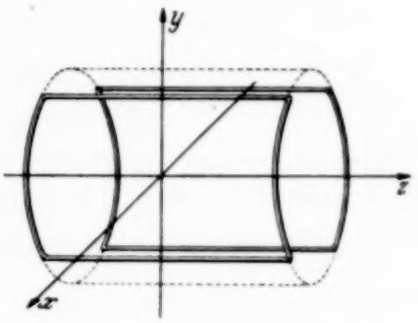


Fig. 2.

2. Das magnetische Ablenkfeld.

Wie man der Fig. 2 entnehmen kann, hat das magnetische Ablenkfeld folgende Symmetrieeigenschaften:

$$\left.\begin{array}{llll} H_x(x,y) = & H_x(-x,y); & H_x(x,y) = -H_x(x,-y), \\ H_y(x,y) = -H_y(-x,y); & H_y(x,y) = -H_y(x,-y), \\ H_z(x,y) = -H_z(-x,y); & H_z(x,y) = & H_z(x,-y). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Da sich das Magnetfeld aus dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ nach den Formeln

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \tag{11}$$

berechnet, folgen für die Komponenten des Vektorpotentials aus (10) und (11) folgende Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{llll} A_z(x,y) = & A_z(-x,y); & A_z(x,y) = -A_z(x,-y), \\ A_y(x,y) = & A_y(-x,y); & A_y(x,y) = & A_y(x,-y), \\ A_x(x,y) = -A_x(-x,y); & A_x(x,y) = & A_x(x,-y). \end{array}\right\} \tag{12}$$

Diese Gleichungen erfordern — wenn man Glieder fünfter Ordnung nicht mehr in Betracht zieht — für die Größen A_x, A_y, A_z den Ansatz

$$\left.\begin{array}{l} A_x = a_{11}\, xy + a_{31}\, x^3 y + a_{13}\, xy^3 + \cdots, \\ A_y = b_{00} + b_{20}\, x^2 + b_{02}\, y^2 + b_{40}\, x^4 + b_{22}\, x^2 y^2 + b_{04}\, y^4 + \cdots, \\ A_z = c_{01}\, y + c_{21}\, x^2 y + c_{03}\, y^3 + \cdots \end{array}\right\} \tag{13}$$

Beschränkt man sich auf Glieder dritter Ordnung, so führt die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

zu

$$c'_{01} + 2\,b_{02} + a_{11} = 0. \tag{15}$$

Die Bedingungen

$$\Delta\,\mathfrak{A} = 0$$

ergeben

$$\left.\begin{aligned} b''_{00} + 2\,b_{20} + 2\,b_{02} &= 0, \\ c''_{01} + 2\,c_{21} + 6\,c_{03} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Gleichungen (15) und (16) gestatten a_{11}, b_{20} und c_{21} zu eliminieren. So folgt bis auf Glieder vierter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} A_x &= -\,(c'_{01} + 2\,b_{02})\,x\,y, \\ A_y &= b_{00} - \tfrac{1}{2}\,(b''_{00} + 2\,b_{02})\,x^2 + b_{02}\,y^2, \\ A_z &= c_{01}\,y - \tfrac{1}{2}\,(c''_{01} + 6\,c_{03})\,x^2\,y + c_{03}\,y^3. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Aus (11) findet man auf Grund von (17) für die „ablenkende" Feldkomponente H_x

$$H_x = c_{01} - b'_{00} - \tfrac{1}{2}\,(c'''_{01} - b'''_{00} + 6\,c_{03} - 2\,b'_{02})\,x^2 + (3\,c_{03} - b'_{02})\,y^2 + \cdots \tag{18}$$

Schreibt man

$$\left.\begin{aligned} c_{01} - b'_{00} &= H_0, \\ 3\,c_{03} - b'_{02} &= \tfrac{1}{2}\,H_2, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

so folgt

$$c''_{01} + 6\,c_{03} - b''_{00} - 2\,b'_{02} = H''_0 + H_2, \tag{20}$$

und H_x erhält die Gestalt

$$H_x = H_0 + \tfrac{1}{2}\,H_2\,y^2 - \tfrac{1}{2}\,(H''_0 + H_2)\,x^2 + \cdots \tag{21}$$

Die Gleichungen (17) können nun noch bedeutend vereinfacht werden, wenn man bedenkt, daß das Magnetfeld ungeändert bleibt, wenn man zum Vektorpotential $\mathfrak{A}$ noch den Gradienten grad χ eines Skalares χ addiert. $\mathfrak{A}$ ist ja durch $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ nur bis auf einen willkürlichen Gradienten grad χ bestimmt, da rot grad $\chi \equiv 0$ ist.

Man wähle

$$\chi = -\,b_{00}\,y + \tfrac{1}{2}\,(c'_{01} + 2\,b_{02})\,x^2\,y - \tfrac{1}{3}\,b_{02}\,y^3. \tag{22}$$

Addiert man nun zu A_x die Größe $\partial\chi/\partial x$, zu A_y die Größe $\partial\chi/\partial y$ und schließlich zu A_z die Größe $\partial\chi/\partial z$, so folgt

$$\left.\begin{aligned} A_x &= 0 + \cdots, \\ A_y &= \tfrac{1}{2}\,(c'_{01} - b''_{00})\,x^2 + \cdots, \\ A_z &= (c_{01} - b'_{00})\,y + \tfrac{1}{2}\,(2\,b'_{02} - 6\,c_{03})\,x^2\,y + \tfrac{1}{3}\,(3\,c_{03} - b'_{02})\,y^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Wenn man hier die Bezeichnungen (19) einführt, folgt endgültig für das magnetische Ablenkfeld

$$\left.\begin{aligned} A_x &= 0 + (\text{Glieder vierter Ordnung}), \\ A_y &= \tfrac{1}{2}\,H'_0\,x^2 + (\text{Glieder vierter Ordnung}), \\ A_z &= H_0\,y - \tfrac{1}{2}\,H_2\,x^2 y + \tfrac{1}{6}\,H_2\,y^3 + (\text{Glieder fünfter Ordnung}). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

3. *Die „ideale" Strahlablenkung.*

Im elektromagnetischen Feld $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ lauten die Bewegungsgleichungen für Elektronen der Ladung $-e$ ($e = |e|$) und der Masse m

$$m\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t} = -e\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{H}). \quad (25)$$

Mittels des Energiesatzes

$$\frac{m}{2}\,v^2 = e\,(U + \varphi), \quad (26)$$

wobei U die Anfangsenergie der Elektronen bedeutet, kann man die Zeit eliminieren und die Elektronenbahnen auf folgende Art darstellen. Man setzt

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{\frac{2m}{e}\,(U+\varphi)(1 + x'^2 + y'^2)} - A_x\,x' - A_y\,y' - A_z, \\ x' &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

und erhält die Bahngleichungen in der Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (28)$$

oder man kann sie auch durch die Extremaleigenschaft

$$\int_{z_0}^{z_1} F\,\mathrm{d}z \to \text{Extremum} \quad (29)$$

kennzeichnen.

Die Funktion F soll nun für das vorliegende elektromagnetische Ablenkfeld berechnet werden, indem man für φ und $\mathfrak{A}$ aus (9) und (24) einsetzt.

Da man die Funktion F mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren darf, ohne daß man an den Bahngleichungen (28) etwas ändert, wollen wir im folgenden diese Funktion durch den $\sqrt{\frac{e}{2mU}}$-fachen Wert ersetzen, aber weiterhin dafür F schreiben. So erhält man

$$F = \sqrt{\left(1+\frac{\varphi}{U}\right)(1+x'^2+y'^2)} - \sqrt{\frac{e}{2mU}}\,(A_x x' + A_y y' + A_z). \quad (30)$$

Wenn man im folgenden zur Abkürzung

$$k = \sqrt{\frac{e}{2mU}} \quad (31)$$

setzt und aus (9) und (24) für φ und $\mathfrak{A}$ einsetzt, ergibt sich

$$F = \left(1 - \frac{E_0}{U}y - \frac{1}{2}\frac{E_2}{U}x^2 y + \frac{1}{6}\frac{E_0'' + E_2}{U}y^3 + \cdots\right)^{1/2}(1+x'^2+y'^2)^{1/2} - k\left(H_0 y + \frac{1}{2}H_0' x^2 y' - \frac{1}{2}H_2 x^2 y + \frac{1}{6}H_2 y^3 + \cdots\right). \quad (32)$$

Diesen Ausdruck entwickeln wir nun nach steigenden Potenzen von x, y, x' und y', wobei wir Glieder höherer als vierter Ordnung nicht mehr in Betracht ziehen wollen. So erhält man

$$F = 1 - \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0\right)y + \frac{1}{2}(x'^2+y'^2) - \frac{1}{8}\frac{E_0^2}{U^2}y^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\frac{E_0^3}{U^3} - \frac{1}{6}\frac{E_0'' + E_2}{U} + \frac{k}{3}H_2\right)y^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{2U} - kH_2\right)x^2 y - \frac{k}{2}H_0' x^2 y' - \frac{1}{4}\frac{E_0}{U}(x'^2+y'^2)y - \frac{1}{8}(x'^2+y'^2)^2 + \cdots \quad (33)$$

Behandeln wir zunächst den Fall von geringer Ablenkung. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß man sich in der Entwicklung von F auf die Glieder niedrigster Größenordnung F_0

$$F_0 = 1 - \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0\right)y + \frac{1}{2}(x'^2+y'^2) \quad (34)$$

beschränken kann. Es wird sich ergeben, daß in diesem Falle die Ablenkung dem angelegten Ablenkfeld streng proportional ist und kleine Fleckverzerrung aufweist. Wir nennen sie daher die „ideale" oder in Analogie zu einem entsprechenden optischen Begriff die „Gaußsche" Strahlablenkung. Die Elektronenbahnen, welche diese „ideale" Ablenkung erfahren, nennen

wir die „achsennahen" Bahnen, weil ihre Ablenkung stets als klein vorausgesetzt wird. Die achsennahen Bahnen sind durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial F_0}{\partial x'} = \frac{\partial F_0}{\partial x}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial F_0}{\partial y'} = \frac{\partial F_0}{\partial y} \tag{35}$$

gegeben. Sie lauten also nach (34)

$$x'' = 0; \qquad y'' = -\left(\frac{E_0}{2U} + k H_0\right).$$

Die Integration ergibt unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + x_0'(z - z_0), \\ y &= y_0 + y_0'(z - z_0) - \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z \int_{z_0}^{z} \left(\frac{E_0}{2U} + k H_0\right) \mathrm{d}z, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

wobei z_0 eine links außerhalb des Ablenkfeldes, sonst aber beliebig angenommene Abszisse darstellt, für welche die Strahlablenkung Y, welche durch

$$Y = -\int_{z_0}^{z} \int_{z_0}^{z} \left(\frac{E_0}{2U} + k H_0\right) \mathrm{d}z \tag{37}$$

gegeben ist, Null ist. Mit (37) lauten die Bahngleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + x_0'(z - z_0), \\ y &= y_0 + y_0'(z - z_0) + Y(z). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Die Ablenkung $Y(z)$ der achsennahen Strahlen hängt, wie man aus (37) erkennt, linear vom Felde E_0 und H_0 ab und sie ist für alle achsennahen Strahlen gleich, da sie von den diese Strahlen festlegenden Größen x_0, y_0, x_0' und y_0' nicht abhängt. Statt durch den Schnittpunkt x_0, y_0 mit der außerhalb des Feldes in $z = z_0$ befindlichen achsensenkrechten Ebene und die Richtungen x_0' und y_0' in diesen Punkten, kann man den unabgelenkten Strahl durch die Koordinaten x_s und y_s und die Richtungen $x_s' = x_0'$ und $y_s' = y_0'$ in der Ebene des Auffangschirmes festlegen. Dieser werde in $z = z_1$ angenommen. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} x_s &= x_0 + x_0'(z_1 - z_0), \qquad x_s' = x_0', \\ y_s &= y_0 + y_0'(z_1 - z_0), \qquad y_s' = y_0'. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Und der achsennahe Strahl ist daher durch

$$\left.\begin{aligned} x &= x_s + x_s'(z - z_1), \\ y &= y_s + y_s'(z - z_1) + Y(z) \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

gegeben.

4. Die Fleckverzerrungen beim Kathodenstrahloszillographen.

Wenn man den Kathodenstrahl stärker ablenkt, müssen auch die Glieder höherer Ordnung in (33)

$$C = -\frac{1}{8}\frac{E_0^2}{U^2}y^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\frac{E_0^3}{U^3} - \frac{1}{6}\frac{E_0'' + E_2}{U} + \frac{k}{3}H_2\right)y^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{2U} - kH_2\right)x^2 y - \frac{k}{2}H_0' x^2 y' - \frac{1}{4}\frac{E_0}{U}(x'^2 + y'^2)y - \frac{1}{8}(x'^2 + y'^2)^2 \tag{41}$$

bei der Berechnung des Strahlschnittpunktes mit der Auffangebene berücksichtigt werden. Wir bezeichnen in diesem Falle die Koordinaten des Schnittpunktes mit der Auffangebene mit $x(C)$ und $y(C)$. Werden die Gaußschen Schnittpunkte mit $x(F_0)$ und $y(F_0)$ bezeichnet, so sind also die gesuchten Ablenkfehler durch

$$\Delta x = x(C) - x(F_0): \quad \Delta y = y(C) - y(F_0) \tag{42}$$

gegeben. Man kann die Größen Δx und Δy von (42) auch als die „Störungen" betrachten, welche die ideale Ablenkung durch den Einfluß der „Störungsfunktion" C von Gleichung (41) erfährt. Der Kathodenstrahl werde durch die Durchstoßpunkte x_s, y_s und die Strahlneigung x_s', y_s' des unabgelenkten Strahles in der Schirmebene nach (40) festgelegt. Die Ablenkfehler werden dann auch als Funktion von x_s, y_s, x_s' und y_s' erscheinen. Nach einem früher angegebenen Verfahren kann man die „Störungen" Δx und Δy aus der „Störungsfunktion" C auf folgende Weise[1]) bestimmen. Man bildet zunächst das Integral

$$S = \int_{z_0}^{z_1} C \, \mathrm{d}z \tag{43}$$

[1]) Vgl. z. B. Beiträge zur Elektronenoptik, Vorträge von der Physikertagung 1936, S. 27 (Leipzig, Joh. Ambr. Barth), oder ZS. f. Phys. **104**, 157, 1936. Natürlich kann man zur Berechnung der Ablenkfehler (42) auch jedes andere Störungsverfahren benutzen. Der Rechnungsgang wird nur nicht so einfach und übersichtlich wie bei dem verwendeten. Wenn man das hier angewandte Verfahren ein „optisches", die anderen Störungsrechnungen aber „mechanische mit der Vorstellung räumlicher Elektronenbahnen" arbeitende Verfahren nennt, so ist dies vollkommen willkürlich und entbehrt jeder sachlichen Begründung. Hier liegt ein leider sehr verbreitetes Mißverständnis vor. Die optische Methode besteht ja nicht in der bloßen Äußerlichkeit der Anwendung der optischen Ausdrucksweise, z. B. indem man die begrifflich gleichbedeutende „Wirkungsfunktion" in „Eikonal" umtauft. Die optische Methode besteht ganz

der Störungsfunktion C, erstreckt über den achsennahen Strahl (40), indem man in die Störungsfunktion $C\,(x, y, y')$ für x, y, und y' aus (40) einsetzt, so daß S eine Funktion der Größen x_s, y_s, x_s' und y_s' wird. Die Ablenkfehler (Störungen) ergeben sich dann aus S durch Differentiation nach x_s' und y_s' in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -\frac{\partial S}{\partial x_s'} = -\frac{\partial}{\partial x_s'}\int_{z_0}^{z_1} C\,\mathrm{d}z, \\ \Delta y &= -\frac{\partial S}{\partial y_s'} = -\frac{\partial}{\partial y_s'}\int_{z_0}^{z_1} C\,\mathrm{d}z. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{8}\,\frac{E_0^2}{U^2}, \qquad C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\,\frac{E_0^3}{U^3} - \frac{1}{6}\,\frac{E_0'' + E_2}{U} + \frac{k}{3}\,H_2\right), \\ C_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{2U} - k\,H_2\right), \quad C_4 = \frac{k}{2}\,H_0', \quad C_5 = \frac{1}{4}\,\frac{E_0}{U}, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

so kann man (41) in der Gestalt schreiben:

$$-C = C_1 y^2 + C_2 y^3 + C_3\,x^2 y + C_4\,x^2 y' + C_5\,(x'^2 + y'^2)\,y - \tfrac{1}{8}\,(x'^2 + y'^2)^2. \tag{46}$$

Indem man dies in (43) einführt und x, y und y' gemäß Gleichung (40) ausdrückt, erhält man einen Ausdruck der Gestalt

$$\begin{aligned} -S = {} & a_1\,y_s' + a_2\,x_s\,x_s' + a_3\,y_s\,y_s' + \tfrac{1}{2}\,a_4\,x_s'^2 + \tfrac{1}{2}\,a_5\,y_s'^2 + a_6\,x_s^2\,y_s'^2 \\ & + a_7\,x_s\,y_s\,x_s' + a_8\,x_s'^2\,y_s + a_9\,x_s\,x_s'\,y_s' + \tfrac{1}{2}\,a_{10}\,x_s'^2\,y_s + a_{11}\,y_s^2\,y_s' \\ & + \tfrac{1}{2}\,a_{12}\,y_s\,y_s'^2 + \tfrac{1}{3}\,a_{13}\,y_s'^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{47}$$

wobei die Punkte jene Glieder andeuten, welche allein von x_s und y_s abhängen und daher bei der Differentiation (44) wegfallen.

---

allgemein in der Untersuchung der Eigenschaften von Strahlen-*Systemen* oder — was dasselbe ist — von Bahnkurven-*Gesamtheiten*. Die optischen Eigenschaften sind also solche, die einer *Gesamtheit* von Bahnkurven zukommen, wie z. B. Brennlinien, Brennpunkte usw. Der mechanische Gesichtspunkt ist dagegen auf die *Einzel*bahn gerichtet. Wie man die optischen Eigenschaften herleitet, ob mit Benutzung mechanischer Begriffe, besser gesagt, ob mit Benutzung einer „mechanischen Terminologie" oder nicht, ist für den obigen Sinn der optischen Betrachtungsweise gleichgültig. Begrifflich besteht übrigens auch in den Methoden der höheren Mechanik und Optik seit Hamilton kein Unterschied.

Die Koeffizienten sind dabei mit den Abkürzungen (45) durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 &= \int_{z_0}^{z_1} [C_1 Y (z-z_1) + 3 C_2 Y^2 (z-z_1) + C_5 \left(2 Y Y' + Y'^2 (z-z_1)\right) - \tfrac{1}{2} Y'^3] \, \mathrm{d}z, \\
a_2 &= 2 \int_{z_0}^{z_1} (C_3 Y + C_4 Y') \, (z-z_1) \, \mathrm{d}z, \qquad a_3 = 2 \int_{z_0}^{z_1} (C_1 + 3 C_2 Y + C_5 Y') \, (z-z_1) \, \mathrm{d}z, \\
a_4 &= 2 \int_{z_0}^{z_1} [C_3 Y (z-z_1)^2 + C_4 Y' (z-z_1)^2 + C_5 Y - \tfrac{1}{4} Y'^2] \, \mathrm{d}z, \\
a_5 &= 2 \int_{z_0}^{z_1} [3 C_2 Y (z-z_1)^2 + C_5 \left(Y + 2 Y' (z-z_1)\right) - \tfrac{3}{4} Y'^2] \, \mathrm{d}z, \\
a_6 &= \int_{z_0}^{z_1} [C_3 (z-z_1) + C_4] \, \mathrm{d}z, \qquad a_7 = 2 \int_{z_0}^{z_1} C_3 (z-z_1) \, \mathrm{d}z, \\
a_8 &= \int_{z_0}^{z_1} C_3 (z-z_1)^3 + C_4 (z-z_1)^2 + C_5 (z-z_1) - \tfrac{1}{4} Y'] \, \mathrm{d}z, \\
a_9 &= 2 \int_{z_0}^{z_1} [C_3 (z-z_1) + C_4] (z-z_1) \, \mathrm{d}z, \qquad a_{10} = 2 \int_{z_0}^{z_1} [C_3 (z-z_1)^2 + C_5] \, \mathrm{d}z, \\
a_{11} &= 3 \int_{z_0}^{z_1} C_2 (z-z_1) \, \mathrm{d}z, \qquad a_{12} = 2 \int [3 C_2 (z-z_1)^2 + C_5] \, \mathrm{d}z, \\
a_{13} &= 3 \int_{z_0}^{z_1} [C_2 (z-z_1)^3 + C_5 (z-z_1) - \tfrac{1}{2} Y'] \, \mathrm{d}z.
\end{aligned}\right\} \quad (48)
$$

Mit (47) ergeben sich dann die Ablenkfehler Δx, Δy auf Grund von (44) in folgender Gestalt:

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta x &= a_2 x_s + a_4 x_s' + a_7 x_s x_s' + 2 a_8 x_s' y_s' + a_9 x_s y_s' + a_{10} x_s' y_s, \\
\Delta y &= a_1 + a_3 y_s + a_5 y_s' + a_6 x_s^2 + a_8 x_s'^2 + a_9 x_s x_s' + a_{11} y_s^2 \\
&\qquad + a_{12} y_s y_s' + a_{13} y_s'^2,
\end{aligned}\right\} \quad (49)
$$

wobei die Koeffizienten a_k durch (48) und (45) gegeben sind. Die Größen $a_1 \ldots a_{13}$, welche die Größe der Ablenkfehler bestimmen, sollen kurz als „Ablenkfehler" bezeichnet werden.

Eine verhältnismäßig einfache Gestalt erhalten die Ablenkfehler (48) im rein magnetischen Ablenkfeld. Auf Grund von (45) und (48) ergibt sich nämlich:

$$
\left.\begin{aligned}
&a_1 = \tfrac{1}{2}\int_{z_0}^{z_1}[k H_2 Y^2 (z-z_1) + Y'^3]\,\mathrm{d}z, \quad a_2 = k\int_{z_0}^{z_1}(H_0' Y' - H_2 Y)(z-z_1)\,\mathrm{d}z,\\
&a_3 = k\int_{z_0}^{z_1} H_2 Y (z-z_1)\,\mathrm{d}z, \quad a_4 = \int_{z_0}^{z_1}[k(H_0' Y' - H_2 Y)(z-z_1) + \tfrac{1}{2} Y'^2]\,\mathrm{d}z,\\
&a_5 = \int_{z_0}^{z_1}[k H_2 Y (z-z_1)^2 - \tfrac{3}{2} Y'^2]\,\mathrm{d}z, \quad a_6 = \frac{k}{2}\int_{z_0}^{z_1}[H_0' - H_2 (z-z_1)]\,\mathrm{d}z,\\
&a_7 = k\int_{z_0}^{z_1} H_2 (z-z_1)\,\mathrm{d}z, \quad a_8 = \tfrac{1}{2}\int_{z_0}^{z_1}\{k[H_0' - H_2 (z-z_1)](z-z_1)^2 + \tfrac{1}{2} Y\}\,\mathrm{d}z,\\
&a_9 = k\int_{z_0}^{z_1}[H_0' - H_2 (z-z_1)](z-z_1)\,\mathrm{d}z, \quad a_{10} = k\int_{z_0}^{z_1} H_2 (z-z_1)^2\,\mathrm{d}z,\\
&a_{11} = \frac{k}{2}\int_{z_0}^{z_1} H_2 (z-z_1)\,\mathrm{d}z, \quad a_{12} = k\int_{z_0}^{z_1} H_2 (z-z_1)^2\,\mathrm{d}z,\\
&a_{13} = \tfrac{1}{2}\int_{z_0}^{z_1}[k H_2 (z-z_1)^3 + 3 Y']\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}\right\} \tag{50}
$$

Weiter werde nun vorausgesetzt, daß die Inhomogenität des Feldes in der Y-Richtung so gering sei, daß überall $H_2 = 0$ gesetzt werden kann [vgl. (21)]. Die Ablenkfehler erhalten dann die Gestalt

$$
\left.\begin{aligned}
&a_1 = \tfrac{1}{2}\int_{z_0}^{z_1} Y'^3\,\mathrm{d}z, \quad a_2 = k\int_{z_0}^{z_1} H_0' Y' (z-z_1)\,\mathrm{d}z, \quad a_3 = 0,\\
&a_4 = \int_{z_0}^{z_1}[k H_0' Y' (z-z_1)^2 + \tfrac{1}{2} Y'^2]\,\mathrm{d}z, \quad a_5 = -\tfrac{3}{2}\int_{z_0}^{z_1} Y'^2\,\mathrm{d}z, \quad a_6 = 0,\\
&a_7 = 0, \quad a_8 = \tfrac{1}{2}\int_{z_0}^{z_1}[k H_0' (z-z_1) + Y]\,\mathrm{d}z, \quad a_9 = k\int_{z_0}^{z_1} H_0' (z-z_1)\,\mathrm{d}z,\\
&a_{10} = 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = \frac{3}{2} Y_1.
\end{aligned}\right\} \tag{51}
$$

Gewöhnlich wird die magnetische Ablenkung unter der Voraussetzung eines seitlich scharf begrenzten, homogenen Magnetfeldes behandelt. Würde man nun, um die Ablenkfelder dieses Feldes zu bestimmen, in (50) einfach $H_0' = 0$ setzen (homogenes Feld!), so wäre das unrichtig. Denn man muß bedenken, daß ein plötzlich abbrechendes Feld eine bloße Fiktion

ist. Der Feldverlauf $H_0(z)$ längs der Achse wäre nämlich eine unstetige Funktion, und an den Feldenden wäre die Ableitung unendlich groß. Der in (21) auf Grund der Potentialgleichung geforderte zweite Differentialquotient wäre dann an diesen Stellen überhaupt nicht definiert. Man kann sich also ein plötzlich abbrechendes Feld nur als Grenzfall eines sich an den „Feldenden" sehr rasch ändernden Feldes vorstellen. Hier wird der Differentialquotient zwar sehr groß, immer aber noch endlich bleiben. Um also folgerichtig vorzugehen, wird man in (51) den Differentialquotienten H_0' durch partielle Differentiation eliminieren und erst in den Endformeln, welche nur mehr H_0 enthalten, zum abbrechenden Feld übergehen. So verstößt man nicht gegen die Potentialtheorie. Auf diese Weise hat man die Rechnung unter der Voraussetzung eines längs der Achse sich stetig änderndes Feldes durchgeführt und erst zur angenäherten Auswertung der Integrale am Schluß der Rechnung die Voraussetzung eingeführt, daß das Feld nur längs eines Stückes der Achse den von Null verschiedenen, konstanten Wert $H_0 = H$ besitzt. So wurde in den Formeln (51) in gewissem Maße auch der durch $H_0' \neq 0$ bedingte Streufeldeinfluß erfaßt, welcher bewirkt, daß auch die Koeffizienten a_2 und a_9 von Null verschieden sind. Würde man dagegen die Voraussetzung eines homogenen Feldes sogleich in die Grundannahmen hineinstecken, so würden a_2 und a_9 von vornherein Null sein.

Um nun die Formeln für diesen Fall auszuwerten, soll vorausgesetzt werden, daß das Feld von $z = z_0 = 0$ bis $z = l$ reiche. Die Entfernung des Schirmes vom Feldende sei L. Es ist also $z_1 = l + L$. Für den Differentialquotienten Y' der Ablenkung erhält man dann aus (37)

$$\left.\begin{aligned} Y' &= -kHz \quad \text{für } z < l, \\ Y' &= -kHl \quad \text{für } z \geqq l \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

und für die Ablenkung an der Stelle $z = z$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} Y &= -\frac{k}{2} H z^2 \quad \text{für } z < l, \\ Y &= -kHlz + \frac{k}{2} H l^2 \quad \text{für } z > l. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Die Ablenkung Y_1 am Fluoreszenzschirm wird also

$$Y_1 = kHl\left(\frac{l}{2} + L\right). \tag{54}$$

Indem man (52) und (53) in (51) einsetzt und den Ablenkwinkel α, welcher nach (52) durch $\operatorname{tg}\alpha = -kHl$ oder, da α klein ist, durch $\alpha = -kHl$ gegeben ist, einführt, erhält man

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2}\left(L+\frac{l}{4}\right)\alpha^3, \quad a_2 = \frac{L}{l}\alpha^2, \qquad a_4 = \left(L+\frac{l}{3}+\frac{2L^2}{l}\right)\alpha^2, \\ a_5 &= \frac{3}{2}\left(L+\frac{l}{3}\right)\alpha^2, \quad a_8 = -\left(L+\frac{l}{3}\right)\alpha, \quad a_9 = -\alpha, \\ a_{13} &= \frac{3}{2}\left(L+\frac{l}{2}\right)\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Nach (49) erhalten somit die Ablenkfelder des magnetischen Ablenksystems folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= x_s\frac{L}{l}\alpha^2 + x_s'\left(L+\frac{l}{3}+\frac{2L^2}{l}\right)\alpha^2 - \frac{3}{2}x_s'y_s'\left(L+\frac{l}{3}\right)\alpha - x_s y_s'\alpha, \\ \Delta y &= -\frac{1}{2}\left(L+\frac{l}{4}\right)\alpha^3 + \frac{3}{2}y_s'\left(L+\frac{l}{3}\right)\alpha^2 - \frac{3}{4}x_s'^2\left(L+\frac{l}{3}\right)\alpha \\ &\qquad - x_s x_s'\alpha + \frac{3}{2}y_s'^2\left(L+\frac{l}{2}\right)\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Einfluß des endlichen Strahlquerschnittes.

Es werde nun angenommen, daß ein kegelförmiges Kathodenstrahlbündel von kreisförmigem Querschnitt im unabgelenkten Zustande gerade mit der Spitze auf die Leuchtschirmmitte $x_s = 0$, $y_s = 0$ auffalle. Es werde also angenommen, daß keine Vorablenkung stattgefunden habe, und daß das Ablenksystem symmetrisch liege zum unabgelenkten Strahl. In einer achsensenkrechten Ebene $z = z_0$ sei der Radius des Strahlquerschnittes r. Führt man in dieser Ebene Polarkoordinaten ein, so gilt

$$x_0 = r\cos\varphi, \quad y_0 = r\sin\varphi. \tag{57}$$

Nach (40) ist andererseits für $x_s = 0$ und $y_s = 0$, $x_0 = -x_s'(L+l)$ und $y_0 = -y_s'(L+l)$, so daß also die Beziehung besteht

$$\left.\begin{aligned} x_s' &= -\frac{r}{L+l}\cos\varphi = -\operatorname{tg}\omega\cos\varphi = -\omega\cos\varphi, \\ y_s' &= -\frac{r}{L+l}\sin\varphi = -\operatorname{tg}\omega\sin\varphi = -\omega\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Mit ω wurde hierbei der (halbe) Öffnungswinkel des Strahlenbündels bezeichnet. Wenn man (58) in den Ausdruck (56) für die Ablenkfehler einsetzt, erhält man als „Aberrationskurven":

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -\frac{3}{4}\left(L+\frac{l}{3}\right)\omega^2\,\alpha\cdot\sin 2\varphi+\left(L+\frac{l}{3}+\frac{2L^2}{l}\right)\omega\,\alpha^2\cos\varphi,\\ \Delta y &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{1}{2}L+\frac{l}{3}\right)-\left(\frac{3L}{2}+\frac{2l}{3}\right)\cos 2\varphi\right]\omega^2\,\alpha\\ &\qquad+\frac{3}{2}\left(L+\frac{l}{3}\right)\omega\,\alpha^2\sin\varphi-\frac{1}{2}\left(L+\frac{l}{4}\right)\alpha^3. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Betrachten wir zunächst das erste Glied, welches in der Strahlablenkung α von erster Ordnung, im Öffnungswinkel ω des Strahlenbündels von zweiter Ordnung ist. Durch Elimination des Azimuts φ ergeben sich die Aberrationskurven

$$\frac{\Delta x^2}{\left[\frac{3}{4}\left(L+\frac{l}{3}\right)\omega^2\,\alpha\right]^2}+\frac{\left[\Delta y-\frac{3}{4}\left(\frac{L}{2}+\frac{l}{3}\right)\omega^2\,\alpha\right]^2}{\left[\frac{3}{4}\left(\frac{3L}{2}+\frac{2l}{3}\right)\omega^2\,\alpha\right]^2}=1. \tag{60}$$

Also Ellipsen. Läßt man ω alle Werte von 0 bis zu einem Maximalwert ω_m durchlaufen, um so alle Strahlen des Bündels mit der Öffnung ω_m zu erfassen, so erhält man eine Schar von Ellipsen mit wachsenden Halbachsen, deren Mittelpunkte an der Y-Achse liegen. Man hat es also mit einer *Koma*-Erscheinung zu tun. Dieser Ablenkfehler soll daher auch mit *Ablenkkoma* bezeichnet werden.

Die Aberrationskurven des zweiten Ablenkfehlers sind

$$\frac{\Delta x^2}{\left[\left(L+\frac{l}{3}+\frac{2L^2}{l}\right)\omega\,\alpha^2\right]^2}+\frac{\Delta y^2}{\left[\frac{3}{2}\left(L+\frac{l}{3}\right)\omega\,\alpha^2\right]^2}=1. \tag{61}$$

Er bewirkt also einen elliptisch verzerrten Schreibfleck, wobei die Hauptachsen a und b der Zerstreuungsellipsen durch

$$a=\left(L+\frac{l}{3}+\frac{2L^2}{l}\right)\omega\,\alpha^2 \qquad \text{und} \qquad b=\frac{3}{2}\left(L+\frac{l}{3}\right)\omega\,\alpha^2 \tag{62}$$

gegeben sind. In Analogie zu dem entsprechenden Bildfehler eines zentrierten optischen Systems, nennen wir diesen Fehler *Ablenk-Astigmatismus*[1]).

[1]) Dieser Ablenkfehler ist für das homogene Feld von Wallraff in der oben zitierten Arbeit hergeleitet worden. Da in dieser Arbeit das von der „Feldstreuung" herrührende Glied $2L^2/l$ nicht erfaßt wird, berechnet sich das Verhältnis der Hauptachsen der Zerstreuungsellipsen zu $b:a=3/2$.

Der dritte durch

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= 0, \\ \Delta y &= -\frac{1}{2}\left(L + \frac{l}{4}\right)\alpha^3 \end{aligned}\right| \tag{63}$$

gegebene Ablenkfehler, welcher die Schärfe des Schreibfleckes nicht beeinträchtigt, ist ein Proportionalitätsfehler. Er entspricht der *Verzeichnung* bei einem rotationssymmetrischen optischen System und soll daher *Ablenk-Verzeichnung* oder Proportionalitätsfehler genannt werden. Er hängt vom Strahlquerschnitt ω nicht ab und ergibt bloß eine zusätzliche Verschiebung in der Ablenkrichtung, welche der dritten Potenz der Ablenkung proportional ist. Das bewirkt, daß die Strahlablenkung nicht mehr streng dem Ablenkstrom proportional ist. Da Δy negativ ist, würde er z. B. beim Zeilenraster eines Fernsehbildes bewirken, daß sich gegen den oberen und unteren Rand zu die Zeilen immer mehr zusammendrängen.

In ganz der gleichen Weise, wie dies eben für die magnetische Ablenkung geschehen ist, könnte man auch die elektrische Ablenkung behandeln. Um den Umfang der Arbeit aber nicht allzusehr anschwellen zu lassen, soll davon abgesehen werden. Es soll nur noch gezeigt werden, daß die eben für magnetische Ablenkung explizit berechneten Ablenkfehler, die durch einen endlichen Strahlquerschnitt verursacht werden, typisch sind auch für die allgemeinste Art der Ablenkung, welche aus einem überlagerten elektrischen und magnetischen Ablenkfeld besteht.

Da der „ideale" Ablenkwinkel α der elektrischen und magnetischen Feldstärke streng proportional ist, ergibt sich aus (48), daß man die Ablenkfehler (48) in folgender Form schreiben kann:

$$\begin{aligned} &a_1 = \alpha^3 b_1, \quad a_2 = \alpha^2 b_2, \quad a_3 = \alpha^2 b_3, \quad a_4 = \alpha^2 b_4, \quad a_5 = \alpha^2 b_5, \\ &a_6 = \alpha b_6, \quad a_7 = \alpha b_7, \quad a_8 = \alpha b_8, \quad a_9 = \alpha b_9, \quad a_{10} = \alpha b_{10}, \\ &a_{11} = \alpha b_{11}, \quad a_{12} = \alpha b_{12}, \quad a_{13} = \alpha b_{13}, \end{aligned}$$

wobei nun die Größen b_1 bis b_{13} nur mehr von der Feldgeometrie und nicht mehr von den numerischen Werten der Ablenkspannung und des Ablenkstromes abhängen. Setzt man wieder ein kegelförmiges Kathodenstrahlbündel von der Winkelöffnung ω voraus ohne Vorablenkung ($x_s = 0$, $y_s = 0$), so gilt also:

$$x_s' = -\omega \cos q, \quad y_s' = -\omega \sin q.$$

Durch Einsetzen in (49) ergeben sich so die Aberrationskurven:

$$\begin{aligned} \Delta x &= b_8 \alpha \omega^2 \sin 2q - b_4 \alpha^2 \omega \cos q \\ \Delta y &= \tfrac{1}{2}\left[(b_8 + b_{13}) - (b_8 - b_{13}) \cos^2 q\right] \alpha \omega^2 - b_5 \alpha^2 \omega \sin q + b_1 \alpha^3. \end{aligned}$$

Man sieht also, daß die durch einen endlichen Strahlquerschnitt verursachten Ablenkfehler durch die fünf Größen b_8, b_{13}, b_4, b_5 und b_1 bestimmt sind.

Die Ablenkkoma ist durch b_8 und b_{13} gegeben. Der Ablenkastigmatismus durch b_4 und b_5. Und schließlich die Ablenkverzeichnung durch b_1. Eine ausführliche Diskussion der übrigen, durch eine exzentrische Lage des unabgelenkten Strahles ($x_s \neq 0$ und $y_s \neq 0$) bedingten Ablenkfehler, wird in der oben zitierten Arbeit von Wendt gegeben.

Zusammenfassung.

Die bei größeren Ablenkungen im Kathodenstrahloszillographen auftretenden Ablenkfehler werden bestimmt.

1. Es ergibt sich zunächst ein „*Proportionalitätsfehler*", welcher bewirkt, daß die Strahlablenkung der Ablenkspannung und dem Ablenkstrom nicht mehr streng proportional ist. Dieser Fehler wächst mit der dritten Potenz des Ablenkwinkels und beeinträchtigt die Schärfe des Schreibfleckes nicht (Verzeichnungsfehler).

2. Weiter gibt es zwei Arten von Fleckverzerrungen, welche durch den endlichen Öffnungswinkel des Kathodenstrahlbündels verursacht sind. Die eine Fleckverzerrung, welche dem Quadrat des Öffnungswinkels und der (idealen) Strahlablenkung direkt proportional ist, hat das Aussehen einer „Koma". Sie wird daher mit „*Ablenkkoma*" bezeichnet.

Der andere Ablenkfehler, welcher dem Öffnungswinkel und dem Quadrat der Strahlablenkung direkt proportional ist, bewirkt eine elliptische Verzerrung des Schreibfleckes und soll „*Ablenkastigmatismus*" genannt werden.

3. Ferner werden die Ablenkfehler bestimmt, die dadurch bedingt sind, daß der unabgelenkte Strahl eine gegenüber der Achse des Ablenksystems windschiefe Lage besitzt (z. B. infolge einer Vorablenkung).

4. Die durch einen endlichen Strahlquerschnitt bedingten Ablenkfehler werden für ein „merklich homogenes" magnetisches Ablenkfeld explizit bestimmt.

Prag, Physikalisches Institut der Deutschen Technischen Hochschule.

Das Druck-Dichte-Diagramm der Elemente bei höheren Drucken am Temperaturnullpunkt [1]).

Von **H. Jensen** in Hamburg.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 28. Oktober 1938.)

Auf Grund des Fermischen Atommodells (einschließlich Austausch) wird die Druck-Dichte-Beziehung für mehrere Kernladungen numerisch berechnet. Übergang ins Modell des homogenen Elektronengases bei sehr hohen Dichten (weiße Zwerge). Anschluß an das experimentell erreichte Gebiet (10^4 Atm.). Geophysikalische Anwendungen.

Einleitung und Zusammenfassung.

Die Druck-Dichtebeziehung wechselt bei niedrigem Druck sehr stark von Element zu Element mit der Lage im periodischen System. Das liegt daran, daß für die Kohäsionskräfte und damit den Platzbedarf nur die äußersten Elektronen maßgeblich sind und die Periodizitäten des Schalenbaues sich im Verlauf der Dichten bei Druck Null widerspiegeln (Lothar Meyers Kurve der Atomvolumina). Man erwartet, daß bei zunehmendem Druck die Eigentümlichkeiten der Schalenstruktur mehr und mehr verwischt werden, weil auch die inneren Elektronen sich in zunehmendem Maße an den Wechselwirkungen beteiligen, und daß demgemäß das Verhalten der Elemente immer ähnlicher wird. Experimentell ist dieses Gebiet freilich noch nicht erreicht, als Hinweis hierauf können wir nur den Umstand werten, daß alle Elemente von geringerer Dichte eine größere Kompressibilität besitzen und deshalb schon im experimentell zugänglichen Gebiet die Dichteunterschiede benachbarter Elemente bei zunehmendem Druck immer geringer werden (vgl. Fig. 1).

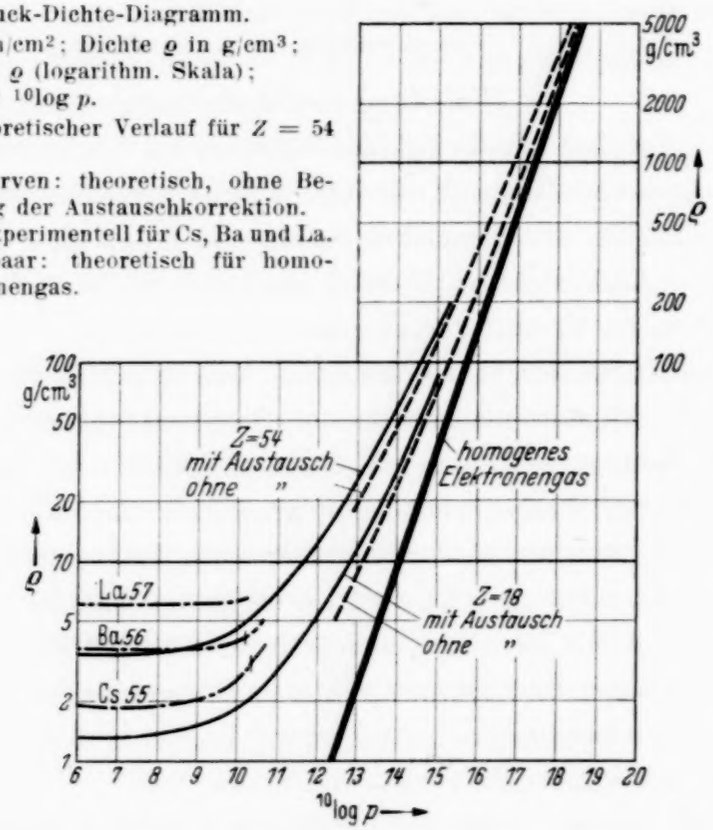
Zur theoretischen Berechnung des asymptotischen Verhaltens bei höheren Drucken bietet sich nun das Thomas-Fermische Atommodell [6, 11, 7] [2]). Man muß sogar diesen Bereich als das sinnvollste Anwendungsgebiet jenes Modells bezeichnen, denn die gröbste Schematisierung, die ihm zugrunde liegt, nämlich das Absehen von den Feinheiten des Schalenbaues, ist eben hier am ehesten zulässig [3]). Dabei wird andererseits das

[1]) Z. T. vorgetragen auf dem Deutschen Physiker- und Mathematikertag in Baden-Baden, 13. September 1938. — [2]) Zahlen in eckiger Klammer beziehen sich auf die Nummer in der Literaturzusammenstellung am Schluß der Arbeit. — [3]) Hinzukommt, daß das Fermische Modell die Verhältnisse nur dort gut wiedergibt, wo die Elektronendichte verhältnismäßig groß ist; dies ist in den äußeren Bereichen eines *freien* Atoms nicht der Fall, während hier, wegen der starken Kompression, die Elektronendichte überall beträchtliche Werte hat, so daß auch in dieser Hinsicht die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Fermi-Modells besonders günstig liegen.

Paulische Ausschließungsprinzip — welches für die Raumbeanspruchung der Elemente bei höheren Drucken entscheidend ist — in konsequenter und übersichtlicher Weise berücksichtigt.

Das *Ergebnis* der unten durchgeführten Rechnung ist in der Fig. 1 zusammengefaßt. Als Ordinate ist die Dichte ϱ in g/cm³ aufgetragen (logarithmische Skala), Abszisse ist der Logarithmus des Druckes (p in dyn/cm²). Die theoretische Dichte ist bei vorgegebenem Druck — (nach dem

Fig. 1. Druck-Dichte-Diagramm.
Druck p in dyn/cm²; Dichte ϱ in g/cm³;
Ordinate: ϱ (logarithm. Skala);
Abszisse: $^{10}\log p$.
Ausgezogen: theoretischer Verlauf für $Z = 54$ bzw. 18.
Unterbrochene Kurven: theoretisch, ohne Berücksichtigung der Austauschkorrektion.
Strichpunktiert: experimentell für Cs, Ba und La.
Rechtes Geradenpaar: theoretisch für homogenes Elektronengas.



benutzten Fermi-Modell, das, wie eben erörtert, mit zunehmendem Druck die wirklichen Verhältnisse immer besser wiedergibt) — eine glatte Funktion der Ordnungszahl; die ausgezogenen Kurven beziehen sich auf die Kernladungen 54 und 18. Für höhere Drucke wurde von der Austauschkorrektion abgesehen (gebrochene Kurven). Man sieht, daß der Austausch bis zu ziemlich hohen Drucken hinauf einen wesentlichen Einfluß hat[1]).

In *astrophysikalischen* Untersuchungen [6] (weiße Zwerge) ist das von Fowler eingeführte Modell des „völlig zerquetschten Atoms" vielfach verwendet worden, in dem man die Elektronen als homogenes entartetes Gas betrachtet und vom Einfluß der Kerne völlig absieht. Die sich hieraus

[1]) Wegen der Bedeutung der Austauschkorrektion siehe unten S. 379.

ergebende Druck-Dichtebeziehung wurde als Geradenpaar eingezeichnet[1]). Man erkennt, daß noch bis hinauf zu sehr hohen Dichten der Einfluß der Kerne sich sehr geltend macht, selbst bei der Dichte 5000 ist noch der Druck um einen Faktor 2 bis 3 geringer als nach dem Fowlerschen Modell.

Anschluß an das experimentell erreichbare Gebiet (Bridgman [1, 1b], p = einige 10^4 Atm.)[2]). Bei diesen verhältnismäßig geringen Drucken kann das Modell, wie eingangs gesagt, nur ein „mittleres" Verhalten der Elemente wiedergeben. Strichpunktiert sind in der Fig. 1 die experimentellen Druck-Dichtekurven für die zu $Z = 54$ benachbarten Elemente Cs_{55}, Ba_{56} und La_{57} markiert. Sie sollten nach der theoretischen Erwartung sich bei höheren Drucken der ausgezogenen Kurve für $Z = 54$[3]) anschmiegen; wie man aus der Fig. 1 entnimmt, ist diese Tendenz durchaus vorhanden.

Bemerkenswert ist, daß bei der Ausführung der Rechnungen nur erst die experimentellen Daten bis zu $p = 1{,}2 \cdot 10^4$ Atm. vorlagen. Hier schien das theoretisch geforderte asymptotische Verhalten durch die experimentellen Daten noch keineswegs gewährleistet, die Kurve für Cs schien zu stark, die für Ba zu wenig gekrümmt zu sein. Inzwischen konnte Bridgman [1b] seine Messungen für diese Elemente bis zu $p = 5 \cdot 10^4$ Atm. ausdehnen[4]). Dabei ergab sich in beiden Fällen bei etwa 20000 Atm. noch ein Umwandlungspunkt. Die neuen Kurvenverläufe sind nun mit der theoretischen Erwartung völlig im Einklang. Umgekehrt dürfte man nun wohl auch in anderen Fällen, wenn sich zeigte, daß der gemessene Verlauf nicht recht zu dem theoretischen asymptotischen Verhalten stimmte, einen Umwandlungspunkt bei höheren Drucken vorhersagen.

Geophysikalische Anwendungen. Die Lücke zwischen den experimentellen und den asymptotischen Verläufen ist jedoch noch immer beträchtlich. Sie läßt sich wenigstens für das Eisen überbrücken durch Benutzung von geophysikalischen (seismischen) Daten. Nach übereinstimmender Ansicht der Geophysiker [13, 15] besteht der Erdkern (von einer Tiefe von etwa 3000 km an) aus metallischem Eisen. Die Temperatur

[1]) Linke Gerade $Z = 54$, rechte Gerade $Z = 18$. Die geringfügige Abhängigkeit von der Kernladung rührt hier lediglich vom Faktor A/Z her, siehe unten Gleichung (4a) und Hund [6]. — [2]) Noch höhere Drucke treten auf bei den von Becker studierten Detonationsvorgängen, R. Becker, ZS. f. Elektrochem. **23**, 40, 1917; ZS. f. Phys. **4**, 393, 1921; Gehlhoffs Lehrbuch d. techn. Physik **1**, 376. Hier ist jedoch die Temperatur so hoch, daß ein unmittelbarer Anschluß an unsere Rechnungen nicht möglich ist. — [3]) Die theoretischen Kurven für $Z = 55$ bis 57 fallen innerhalb der Zeichengenauigkeit hiermit zusammen. — [4]) Herrn Prof. Bridgman bin ich für die Zusendung seiner Arbeit sehr zu Dank verpflichtet.

ist nach allen geophysikalischen Schätzungen unter 10000^0 [12]. Man kann sich nun überzeugen, wenn man den thermischen Ausdehnungskoeffizienten nach Bridgmans Messungen [1a] vorsichtig bis zu den Drucken im Erdinnern extrapoliert, daß man bei den in Frage kommenden Drucken gut die Temperatur als Null ansehen kann (jedenfalls mit der Genauigkeit, mit der die zu verwendenden seismischen Daten bekannt sind, s. unten). Es ist deshalb ein unmittelbarer Anschluß an unsere Berechnungen möglich. Nun ist aus den Laufzeitkurven der Erdbebenwellen die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Erdinnern berechnet worden [5]. An der Grenze des Erdkerns ist sie etwa 8 bis 9 km/sec, im Erdmittelpunkt liegt sie zwischen 11 und 12. Diese Geschwindigkeit c ist mit dem Druck-Dichtediagramm verknüpft durch die Beziehung $c^2 = \frac{dp}{d\varrho}$. Wir kennen also mit der Schallgeschwindigkeit die Tangentenrichtungen an die Druck-Dichtekurve. Freilich ist hier zunächst c als Funktion der Tiefe gegeben, während wir sie als Funktion des Druckes gebrauchen. Nun hängt der Druckverlauf mit der Tiefe ab von der Massenverteilung in der Erde. Glücklicherweise ergeben aber alle Ansätze für die Massenverteilung, welche mit den übrigen geophysikalischen Daten im Einklang sind und insbesondere den richtigen Wert für das Trägheitsmoment der Erde liefern, praktisch den gleichen Druckverlauf [15, 3] [1]) (jedenfalls wieder mit der Genauigkeit, mit der die Schallgeschwindigkeit bekannt sind). Innerhalb dieser Unsicherheit können wir also $c^2 = dp/d\varrho$ als Funktion des Druckes als bekannt ansehen. Wir können jetzt eine Interpolationsformel aufstellen, welche genügend viele verfügbare Konstanten enthält, um die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

1. An der Anschlußstelle an das experimentelle Gebiet ($p = 1{,}2 \cdot 10^{10}$ dyn/cm^2) die richtigen Werte von ϱ und $d\varrho/dp$.

2. Für sehr hohe Drucke asymptotisches Übergehen in die theoretische Kurve.

3. Bei $p = 2{,}8 \cdot 10^{12}$ dyn/cm^2 (4500 km Tiefe) $c = 10$ km/sec^2).

Eine Reihe versuchsweise gewählter Formeln lieferten praktisch den gleichen Verlauf, die in Fig. 2 eingezeichnete gebrochene Kurve hatte folgende Gestalt. Mit $\varrho_0(p)$ sei der theoretische Verlauf[3]) bezeichnet,

[1]) Vgl. insbesondere die Fig. 157 in [15]. — [2]) Die Tiefe 4500 km wurde gewählt, weil hier die Unsicherheit des Druckes und der Schallgeschwindigkeit verhältnismäßig am geringsten ist, vgl. die oben zitierte Fig. 157 in [15]. — [3]) Die bei der Interpolation benutzten Werte $d\varrho_0/dp$ mußten graphisch bestimmt werden, siehe unten.

dann setzen wir: $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$; $\varrho_1 = A\,(1 + a\,\varrho_0)\,e^{-\alpha\varrho_0}$; mit den Werten $A = 7{,}25$, $a = 0{,}235$, $\alpha = 0{,}30$ werden die genannten Bedingungen erfüllt.

In Fig. 2 werden durch die strichpunktierte Kurve die experimentellen Daten (Bridgman), durch die ausgezogene Kurve das asymptotische theoretische Verhalten, und schließlich durch die gebrochene Kurve der

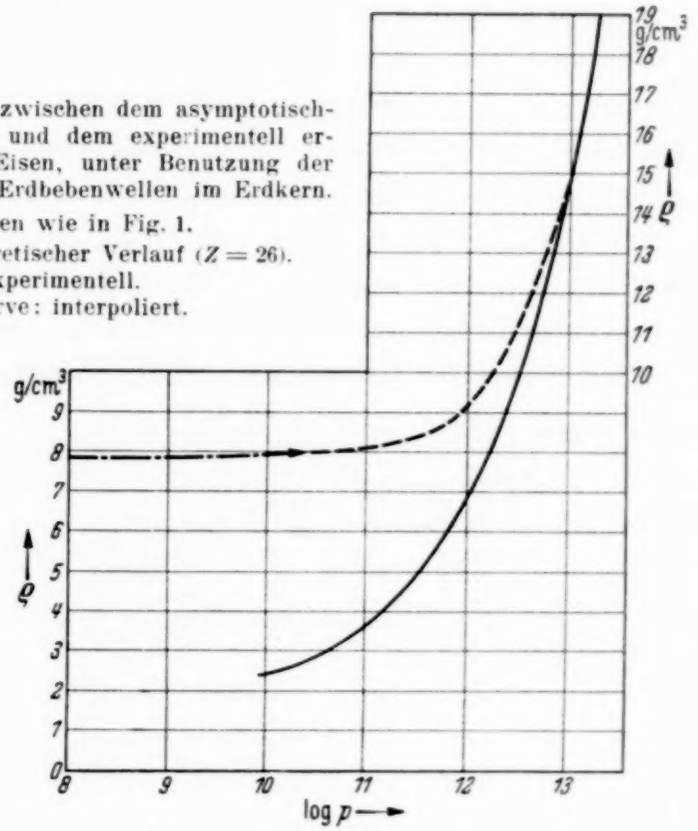


Fig. 2. Interpolation zwischen dem asymptotisch-theoretischen Verlauf und dem experimentell erreichten Gebiet für Eisen, unter Benutzung der Geschwindigkeit der Erdbebenwellen im Erdkern.
Koordinaten wie in Fig. 1.
Ausgezogen: theoretischer Verlauf ($Z = 26$).
Strichpunktiert: experimentell.
Unterbrochene Kurve: interpoliert.

eben berechnete interpolierte Verlauf wiedergegeben. Natürlich beansprucht die Kurve keine große Genauigkeit; die Unsicherheit liegt, gemäß den benutzten Daten, bei 10%.

Aus diesem, unter Benutzung der Schallgeschwindigkeiten, interpolierten Verlauf läßt sich nun z. B. die Dichte im Erdmittelpunkt ($p \sim 3{,}5 \cdot 10^6$ Atm.) ablesen, sie hat den Wert von etwa 11,5 g/cm³. Dieser verhältnismäßig hohe Wert steht im Einklang mit den neueren geophysikalischen Ansätzen über die Massenverteilung in der Erde [3] und kann als physikalische Begründung der dort zum Teil noch willkürlich gemachten Annahmen angesehen werden[1]).

[1]) Ausführlichere geophysikalische Anwendungen des hier berechneten Druck-Dichte-Diagramms sollen an anderer Stelle erscheinen.

Durchführungen der Rechnungen.

Die Verwendung des Fermi-Modells bringt die Vereinfachung mit sich, daß wir uns auf die Behandlung eines einzigen kugelsymmetrischen Atoms beschränken können. Denn beim absoluten Nullpunkt können wir uns die Atome im Gitter angeordnet denken, so daß jedes Atom sehr symmetrisch von seinen Nachbaratomen umgeben ist — dieses ist sogar auch noch im flüssigen Zustand der Fall (Debye), insbesondere bei den uns interessierenden hohen Drucken —. Ziehen wir nun, nach dem Vorbild von Wigner und Seitz [14], zwischen einem Atom und allen seinen Nachbarn die Symmetrieebenen, so schließen diese ein Polyeder sehr hoher Symmetrie — das auf das betreffende Atom entfallende Volumen — ein, das wir in guter Näherung durch eine Kugel approximieren können. Die Randbedingung lautet dann, daß Dichte und Potential mit ihren Ableitungen beim Übergang von einer „Zelle" zu anderen stetig sind, und das bedingt wegen der Symmetrie, daß die Ableitungen selbst Null sind.

Mit diesen Bedingungen liefert das Fermische Modell eindeutig eine bestimmte kugelsymmetrische Elektronenverteilung $n(r)$ und damit auch einen bestimmten Energieinhalt E des Atoms in Abhängigkeit vom Volumen v — bzw. vom Radius R, der dieses Volumen approximierenden Kugel — [7]. Beim Temperaturnullpunkt bestimmt sich nun der Druck aus: $\mathrm{d}E = -p \cdot \mathrm{d}v$, d. h.

$$p = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v} = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R}, \tag{1}$$

worin $v = 4/3 \cdot \pi \cdot R^3$ gesetzt ist. Die Größe (1) wurde nun in einer früheren Arbeit berechnet — [7], Gln. (4) bis (5), dort steht a an Stelle von R —: es ergab sich der anschaulich zu interpretierende Ausdruck

$$-\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R} = \left\{\frac{2}{3}\varkappa_K\, n_R^{5/3}(r) - \frac{1}{3}\varkappa_A\, n_R^{4/3}(r)\right\}_{r=R}, \tag{2}$$

worin r den Abstand vom Atomkern bedeutet, $n_R(r)$ ist der vom Parameter R abhängige Verlauf der Elektronendichte. $\varkappa_K$ und $\varkappa_A$ sind zwei universelle Konstanten [7]:

$$\varkappa_K = \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{2m}; \qquad \varkappa_A = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} e^2. \tag{2a}$$

Der erste Term in (2) stellt den durch das Pauli-Prinzip bedingten Nullpunktsdruck der Elektronen dar, der zweite Term ist bedingt durch die sogenannte Austauschkorrektion. Wir schreiben zur Abkürzung n_R für

die Elektronendichte $n_R(R)$ am Atomrand, d. h. in der Mitte zwischen zwei Nachbaratomen. Dann ergibt sich:

$$p = \frac{2}{3}\varkappa_K n_R^{5/3}\left(1 - \frac{\varkappa_A}{2\varkappa_K} n_R^{-1/3}\right) = \frac{2}{3}\varkappa_K n_R^{5/3}\left(1 - \frac{0{,}129}{a_H n_R^{1/3}}\right) \qquad (3)$$

Im zweiten Ausdruck sind in der Klammer die numerischen Werte der Konstanten eingesetzt, a_H ist der Bohrsche Wasserstoffradius.

Sehen wir zunächst von der Austauschkorrektion ab, d. h. setzen wir $\varkappa_A = 0$, so besagt (3), daß der Druck ebenso groß ist wie in einem entarteten homogenen Elektronengas mit einer Dichte, wie sie am Atomrand, d. h. in der Mitte zwischen zwei Atomen, herrscht. Dieses Resultat haben auch Slater und Krutter in einer späteren Arbeit [11] für das Fermi-Atom ohne Austausch auf anderem Wege hergeleitet[1]). Den vollen Ausdruck (3) für den Druck bei Berücksichtigung des Austausches hatten sie vermutet, aber nicht analytisch begründen können. Die Austauschkorrektion nimmt, wie man aus (3) unmittelbar erkennt, mit zunehmendem Druck an Bedeutung ab; daß sie bis zu ziemlich hohen Drucken hinauf überhaupt einen merklichen Einfluß hat, liegt nicht daran, wie die Bezeichnung „Austausch" zunächst vermuten ließe, daß etwa ein subtiler Quanteneffekt sich hier geltend machte, sondern daran, daß durch die sogenannte Austauschkorrektion vor allem eine zu grobe Schematisierung in der Berechnung der elektrostatischen Energie wieder gut gemacht wird, welche der ursprünglichen Fassung des Fermischen Modells anhaftete[2]).

Zur Berechnung des Druckes brauchen wir also nur die Elektronendichte als Funktion des Atomradius zu kennen, und diese läßt sich unmittelbar aus den bereits vorliegenden Lösungen der Fermi-Dirac-Gleichung[3]) entnehmen. An Stelle des Atomradius führt man noch zweckmäßig die mittlere Elektronendichte $\bar{n}$ ein, die definiert ist durch:

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \bar{n} = Z = \text{Kernladung} = \text{Elektronenzahl}. \qquad (4)$$

Sie ist, wie man unmittelbar einsieht, mit der Massendichte verknüpft durch die Beziehung (A = Atomgewicht, N_L = Lochschmidtsche Zahl):

$$\varrho = \frac{A}{N_L}\frac{\bar{n}}{Z}. \qquad (4a)$$

Da der Faktor A/Z für alle Elemente ziemlich gleich ist (außer für den Wasserstoff, für den unser Modell ohnedies nicht sinnvoll ist), ist ϱ also praktisch proportional zu $\bar{n}$.

[1]) Wie mir Prof. Slater brieflich mitteilte, unabhängig von den Überlegungen in [7]. — [2]) Vgl. z. B. [7a] und dort besonders die Fußnote in § 2. — [3]) Siehe [8], Anhang; vgl. dort auch insbesondere die Fußnote auf S. 287.

In dem in der Astrophysik vielfach verwendeten Modell des „völlig zerquetschten Atoms", in dem man die Elektronen homogen verteilt annimmt, wäre der Druck

$$\bar{p} = \frac{2}{3} \varkappa_K \bar{n}^{5/3}. \tag{4b}$$

Demgemäß ist der Ausdruck

$$f(\bar{n}) = \frac{n_R}{\bar{n}} \left\{1 - \frac{0{,}129}{a_H n_R^{1/3}}\right\}^{3/5}, \quad p = \bar{p} \cdot f^{5/3}, \tag{4c}$$

direkt ein Maß für den Fehler des letztgenannten Modells, welches dem Umstand keine Rechnung trägt, daß in der Umgebung der Kerne die

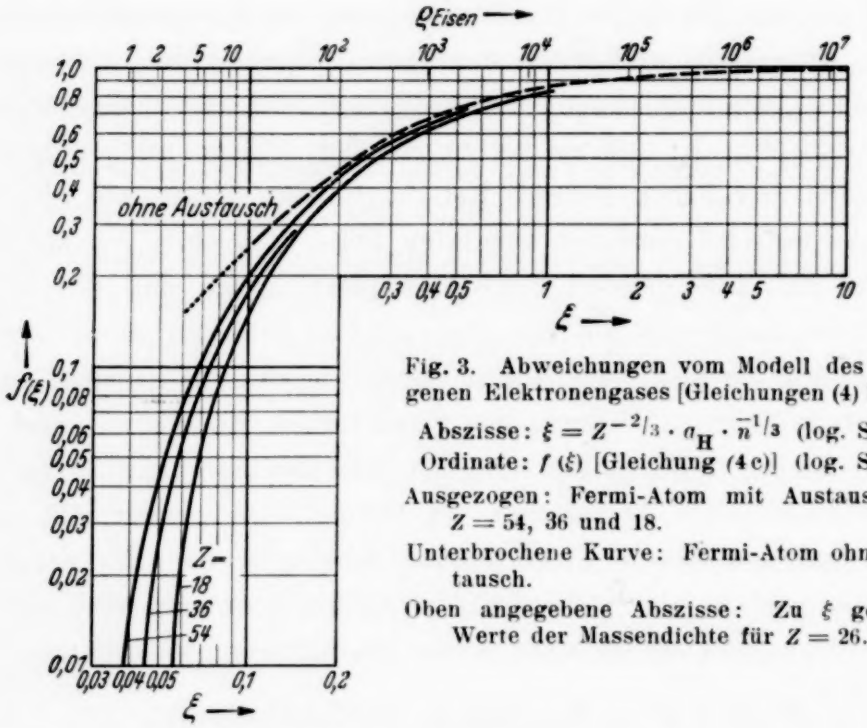


Fig. 3. Abweichungen vom Modell des homogenen Elektronengases [Gleichungen (4) bis (5)].
Abszisse: $\xi = Z^{-2/3} \cdot a_H \cdot \bar{n}^{1/3}$ (log. Skala).
Ordinate: $f(\xi)$ [Gleichung (4c)] (log. Skala).
Ausgezogen: Fermi-Atom mit Austausch für $Z = 54$, 36 und 18.
Unterbrochene Kurve: Fermi-Atom ohne Austausch.
Oben angegebene Abszisse: Zu ξ gehörige Werte der Massendichte für $Z = 26$.

Elektronen sich konzentrieren und deshalb in den Zwischengebieten die Elektronendichte und damit auch der Druck geringer wird. Falls man die Austauschkorrektion vernachlässigt — und das ist bei den astrophysikalisch interessierenden Dichten natürlich zulässig —, so gibt $f(\bar{n})$ einfach das Verhältnis Randdichte zu mittlerer Dichte an.

In Fig. 3 ist $f(\bar{n})$ aufgetragen, als Abszisse ist die Größe $\xi = Z^{-2/3} \cdot a_H \cdot \bar{n}^{1/3}$ in logarithmischer Skala gewählt, diese Einheit ist deshalb zweckmäßig, weil dann, wenigstens solange man vom Austausch absieht, f eine universelle Funktion von ξ ist und nicht mehr explizit von Z abhängt.

Denn wenn wir für die Rechnung die Fermischen Einheiten einführen — vgl. [8], Gleichung (5) bis (7), dort steht wieder a an Stelle von R —, so ergibt sich mit $R/\lambda = x_0$:

$$\xi = Z^{-2/3} a_H n^{1/3} = \frac{0{,}701}{x_0}, \quad f(n) = \frac{x_0^3}{3}\left(\sqrt{\frac{\varphi(x_0)}{x_0}} + \beta\right)^3 \left\{1 - \frac{\frac{5}{4}\beta}{\sqrt{\frac{\varphi}{x_0}} + \beta}\right\}^{3/5} \cdot \quad (5)$$

Wenn wir vom Austausch absehen ($\beta = 0$), so hängt $f(\bar{n})$ lediglich von x_0 und damit von ξ ab; nur durch die Austauschkorrektion $\beta = 0{,}21\, Z^{-2/3}$ kommt eine explizite Abhängigkeit von Z zustande.

Die gebrochene Kurve bezieht sich auf die Fermi-Gleichung ohne Austausch, $\varkappa_A = 0$, ich habe sie nach numerischen Daten von Slater und Krutter [11] und Baker [2] berechnet. Für sehr geringe Dichten $\xi < 0{,}1$ weichen die numerischen Daten von Baker und Slater etwas voneinander ab, man könnte hier die genaueren numerischen Lösungen von Mrowka und Recknagel [9] benutzen; da aber hier, wie man aus Fig. 3 entnimmt, der Einfluß der Austauschkorrektion bereits sehr wesentlich ist, hat die Fortsetzung der Kurve zu kleineren Werten von ξ geringes Interesse. Die ausgezogenen Kurven ergeben sich nach der Fermi-Gleichung mit Austausch [8]. Hier geht die Kernladung explizit ein, die Kurven gelten für $Z = 54$, $Z = 36$ und $Z = 18$.

Die Austauschkorrektion macht sich in (3) und (4c) auf doppelte Weise geltend, einmal wird $f(n)$ verkleinert durch den Ausdruck in der geschweiften Klammer, zweitens bewirkt die Korrektion in der Fermi-Gleichung, daß im Atom selbst die Dichte rascher abfällt, so daß bei vorgegebenem R bzw. $\bar{n}$ sich n_R kleiner ergibt als nach der Fermi-Gleichung ohne Austausch. Beide Effekte wirken im gleichen Sinne und sind, wie die Rechnung zeigt, in weitem Bereich von derselben Größenordnung.

Am oberen Rand der Fig. 3 sind der Anschaulichkeit halber noch die zu den betreffenden ξ-Werten gehörigen Massendichten für ein mittleres Atomgewicht (Eisen, $Z = 26$) angegeben. — Die in der Fig. 3 zusammengefaßten Daten brauchen wir jetzt nur zur Berechnung des Druckes in die Gleichung (4c) einzusetzen und erhalten so die Werte, welche in der Fig. 1 dargestellt sind.

Eingefügt seien noch einige Bemerkungen, über die Verhältnisse bei extrem hohen Dichten, bei welchen für das homogene Elektronengas die unrelativistische Druck-Dichte-Beziehung $p = \text{konst} \cdot n^{5/3}$ übergeht in die relativistische Beziehung $p = \text{const} \cdot n^{4/3}$, vgl. z. B. Hund [6]. Dies geschieht bei $n^{1/3} a_H \sim 137/\pi$ (für Eisen $\xi \sim 4$). Für diese und noch größere ξ-Werte muß man natürlich auch für das Atom die relativistische Fermi-Gleichung benutzen [7b]. Es läßt sich dann genau wie oben zeigen, daß (5) zu ersetzen ist durch

$$p = \text{const} \cdot \bar{n}^{4/3} \cdot \left(\frac{n_R}{\bar{n}}\right)^{4/3}. \quad (6)$$

Die relativistische Fermi-Gleichung des Atoms zur Berechnung von n_R ist jedoch nicht willkürfrei zu lösen, da die Gleichung unmittelbar am Kern übergeht in $n = \text{const} \cdot r^{-3}$, also bei $r = 0$ stark singulär wird [7b]. Ich habe die Gleichung nun für einige Fälle numerisch durchgerechnet unter der naheliegenden Annahme, $n = 0$ für $r <$ Kernradius, n nach der relativistischen Fermi-Gleichung für $r \geqq$ Kernradius. Das Ergebnis ist für Eisen ($Z = 26$) bei $\xi = 5$: $n_R/\bar{n} = 0{,}96 \pm 0{,}02$; bei $\xi = 10$: $n_R/\bar{n} = 0{,}98 \pm 0{,}02$. Der Einfluß der Kerne ist also bei diesen hohen Dichten, auch wenn man das Atom nach der relativistischen Fermi-Gleichung behandelt, praktisch zu vernachlässigen. In der Fig. 3 ist die strichpunktierte Kurve durch die beiden berechneten Werte gelegt.

Kompressibilität. Für verschiedene Anwendungen, insbesondere auch für den eben durchgeführten Anschluß an das experimentell erreichbare Gebiet, ist noch die Kenntnis des Verlaufs der Kompressibilität $\varkappa$ nötig. Sie ist definiert durch

$$\frac{1}{\varkappa} = \varrho \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho}. \tag{7}$$

In den oben bei Gleichung (6) eingeführten Fermischen Einheiten gilt nun nach (4) bis (5) $\varrho = \text{const}\ \xi^3$ und damit

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{3}\,\xi \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\xi}.$$

Weiter ist nach (4a) bis (5): $p = \text{const}\ \xi^5 f^{5/3}(\xi)$ und deshalb schließlich

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{5}{3}\,p\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{\xi}{f}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right). \tag{8}$$

Die Größe $df/d\xi$ mußte graphisch bestimmt werden, dies war mit einer Genauigkeit von einigen Prozent möglich.

Im Grenzfall des homogenen Elektronengases ist $f = 1$ und $1/\varkappa = \frac{5}{3}\,p$, der Ausdruck $\dfrac{3}{5\,p\,\varkappa} = 1 + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\xi}{f}\,\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}$ mißt demgemäß die Abweichung von diesem Grenzfall; er wird in Fig. 4 durch die punktierten Kurven dargestellt; die zugehörige Ordinatenskala ist auf der rechten Seite der Figur markiert, die Abszisse ist ${}^{10}\log p$ in CGS.

Die Ordinate für die ausgezogenen Kurven ist ${}^{10}\log(1/\varkappa)$, worin $\varkappa$ wieder in CGS. Die Gerade III bezieht sich auf den Grenzfall $1/\varkappa_0 = \frac{5}{3}\,p$; die Kurven I und II gemäß Gleichung (8) für die Kernladungen $Z = 54$ bzw. 18. Wie man sieht, ist die Abhängigkeit von der Kernladung nicht sehr stark, wenn man den Druck selbst und nicht etwa die Dichte als Abszisse wählt. Strichpunktiert sind wieder die experimentellen Werte [1, 1b][1]) eingezeichnet, sie liegen bei $p = 0$ über fast drei Zehnerpotenzen

[1]) Die Werte für Ba und Cs bei $p > 2 \cdot 10^{10}$, d. h. jenseits der Umwandlungspunkte, wurden nach den Angaben bei Bridgman [16] roh abgeschätzt.

verstreut, das asymptotische Übergehen in den theoretischen Verlauf wird also zum Teil erst bei ziemlich hohen Drucken vor sich gehen. In Übereinstimmung mit der Fig. 1 ist diese Tendenz bei den leichteren und mittelschweren Elementen bereits deutlich vorhanden.

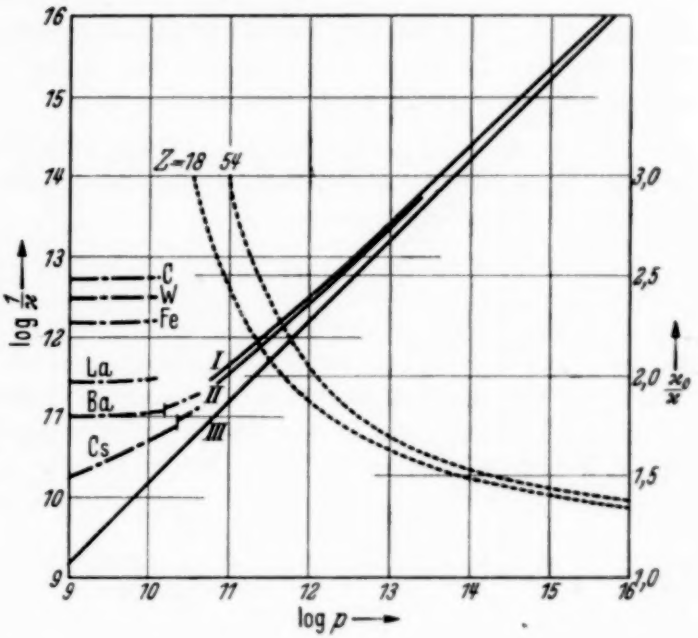


Fig. 4.
Kompressibilitäten $\varkappa$ in CGS.

Abszisse: $^{10}\log p$.

Linke Ordinatenachse: $^{10}\log \frac{1}{\varkappa}$.

Ausgezogene Kurven:
I theoretisch für $Z = 54$,
II theoretisch für $Z = 18$,
III theoretisch für homogenes Elektronengas.

Strichpunktiert: experimentelle Daten.

Rechte Ordinatenachse, punktierte Kurven: $\varkappa_0/\varkappa$ = Verhältnis der Kompressibilität des homogenen Elektronengases zur hier berechneten für $Z = 54$ bzw. 18.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Lenz danken für viele wertvolle Besprechungen und vor allem für den Hinweis auf die Möglichkeit des Vergleichs mit geophysikalischen Daten. Ebenso bin ich Herrn Prof. Tams, Hauptstation für Erdbebenforschung, Hamburg, sehr zu Dank verpflichtet für viele Unterhaltungen über geophysikalische Fragen.

Hamburg, Institut für theoretische Physik, Oktober 1938.

Anhang.

Über die Anwendung der Fermi-Dirac-Gleichung auf Metalle durch Slater und Krutter [11]. Im Anschluß an die Gleichung (2) seien hier einige Bemerkungen angefügt über die genannte Arbeit von Slater und Krutter. Slater hatte gehofft [10], daß schon die Berücksichtigung der Diracschen Austauschkorrektion genügte, um ein Verständnis der metallischen Bindung zu ermöglichen, auch wenn man die Atome „en bloc" behandelte in der Weise, wie wir es hier bei hohen Drucken getan haben: Das metallische Gitter sollte dargestellt werden durch eine Packung von Atomen mit der oben erörterten (durch Kugelsymmetrie zu ersetzenden) hohen Polyedersymmetrie. Man würde eine Bindung erhalten, wenn sich bei einem Atomradius, der etwa dem halben experimentellen Gitterabstand entspricht, ein Minimum der Energie ergeben würde. Slater und Krutter haben dementsprechend die Fermi-Dirac-Gleichung für Natrium und Kupfer numerisch gelöst und für verschiedene Atomradien die Energie des Atoms durch Quadraturen berechnet. Es ergab sich aber, innerhalb der numerischen Genauigkeit, kein Energieminimum.

Das Ergebnis dieser numerischen Rechnungen war aber ohne weiteres vorherzusagen nach den Betrachtungen in [7], wo die analytische Rechnung gezeigt hatte, daß das Fermi-Modell grundsätzlich nur Abstoßungskräfte liefern kann, — auch bei Einbeziehung des Austausches —, und dementsprechend für alle Probleme der nichtpolaren Bindung unzureichend ist. Denn dort war gezeigt worden, daß der Radius des freien Atoms sich aus der Bedingung $\mathrm{d}E/\mathrm{d}R = 0$ bestimmt, für kleinere Radien steigt die Elektronendichte am Atomrand an, so daß nach Gleichung (4) bis (5) in [7], bzw. Gleichung (2) dieser Arbeit, die Ableitung der Energie nach dem Radius immer positiv ist und demgemäß kein Energieminimum auftreten kann.

Weiter wird in der genannten Arbeit von Slater und Krutter für den Fall des Fermi-Dirac-Atoms bei beliebigem Radius der *Virialsatz* erörtert, für den sie die Form vermuteten:

$$3\,pv = 2\,E_K + E_P + E_A.$$

(E_K = gesamte kinetische Energie im Atom, E_P = gesamte elektrostatische Energie, E_A = gesamte Austauschenergie) den sie aber nur durch numerische Rechnung verifizieren konnten. Auch diese Relation läßt sich jedoch leicht analytisch herleiten durch eine einfache Erweiterung einer eleganten Methode von V. Fock [4]. Es ist:

$$E_K = \varkappa_K \int_{r=0}^{R} n^{5/3}\,\mathrm{d}\tau; \quad E_A = -\varkappa_A \int_{r=0}^{R} n^{4/3}\,\mathrm{d}\tau;$$

$$E_p = -Ze^2 \int_{r=0}^{R} \frac{n}{r}\,\mathrm{d}\tau + \frac{e^2}{2} \int_{r=0}^{R} \int_{r'=0}^{R} \frac{n(r)\,n(r')}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'.$$

Man führt jetzt eine Hilfsfunktion ein: $n_\lambda = \lambda^3 n(\lambda r)$ und die Hilfsintegrale

$$E_K^\lambda = \varkappa_K \int_0^{R/\lambda} n_\lambda\,\mathrm{d}\tau$$

und entsprechend E_p^λ und E_A^λ, worin überall n durch n_λ und der Integrationsrand R durch R/λ ersetzt ist. Dann gilt einerseits mit $E_\lambda = E_K^\lambda + E_p^\lambda + E_A^\lambda$, vgl. [4]:

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda=1} = 2\,E_K + E_P + E_A. \tag{A_1}$$

Andererseits kann man auch die Ableitung von E nach λ folgendermaßen berechnen, vgl. [7]:

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \int_0^{R/\lambda} \mathrm{d}\tau \cdot \frac{\mathrm{d}n_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\frac{5}{3}\varkappa_K n_\lambda^{2/3} - \frac{4}{3}\varkappa_A n_\lambda^{1/3} - \frac{Ze^2}{r} + e^2 \int_0^{R/\lambda} \frac{n_\lambda(r')}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'\right\}$$

$$+ 4\pi\left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}(R/\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \cdot \left[\varkappa_K n_\lambda^{5/3} - \varkappa_A n_\lambda^{4/3} - \frac{Ze^2}{r} n_\lambda + e^2 n_\lambda \int_0^{R/\lambda} \frac{n_\lambda(r')}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'\right]_{r=R}. \tag{A_2}$$

Setzt man darin jetzt $\lambda = 1$, so läßt sich das Integral in (A_2) mit Hilfe der Fermi-Gleichung umformen, [7], in:

$$-\mu e \int_0^R \left(\frac{\mathrm{d}\, n_\lambda}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)_{\lambda=1} \mathrm{d}\,\tau. \qquad (A_3)$$

Dies läßt sich jedoch leicht auswerten, denn weil $\int_0^{R/\lambda} n_\lambda \,\mathrm{d}\,\tau = \int_0^R n \,\mathrm{d}\,\tau$ unabhängig von λ ist, so gilt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\lambda}\int_0^{R/\lambda} n_\lambda \,\mathrm{d}\,\tau\right)_{\lambda=1} = \int_0^R \mathrm{d}\,\tau \left(\frac{\mathrm{d}\, n_\lambda}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)_{\lambda=1} - 4\pi R^3 \cdot n\,(R) = 0. \qquad (A_4)$$

Setzt man nun (A_4) und (A_3) in (A_2) für $\lambda = 1$ ein, so ergibt sich, wenn man nochmals die Fermi-Gleichung benutzt — ganz analog wie in [7], Gleichung (4) bis (5) —, die Beziehung

$$\left(\frac{\mathrm{d}\, E_\lambda}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)_{\lambda=1} = 4\pi R^3 \cdot \left[\frac{2}{3}\varkappa_K n^{5/3} - \frac{1}{3}\varkappa_A n^{4/3}\right] = 3\,v \cdot p, \qquad (A_5)$$

letzteres nach Gleichung (2). Durch Gleichsetzen von (A_1) und (A_5) ergibt sich so der Virialsatz in der von Slater und Krutter vermuteten Form $3\,pv = 2E_K + E_P + E_A$.

Literatur.

[1] P. W. Bridgman, High Pressure Physics. London 1931; High Pressure Phenomena. Rev. mod. Phys. **7**, 1, 1935. — [1a] P. W. Bridgman, Proc. Amer. Acad. of Art. and Sc. **70**, 69, 1935 (thermische Daten). — [1b] P. W. Bridgman, ebenda **72**, 205, 1938 (höchste Drucke). — [2] E. Baker, Phys. Rev. **36**, 630, 1930 (numer. Lösung der Fermi-Gleichung). — [3] K. E. Bullen, Monthly Notices, Geophysic. Supplement **3**, 395, 1936; Transact. Roy. Soc. New Zeeland **67**, 122, 1937. — [4] V. Fock, Phys. ZS. d. Sowjet-Union **1**, 747, 1932 (Virialsatz); dazu auch H. Jensen, ZS. f. Phys. **81**, 611, 1933. — [5] B. Gutenberg u. C. Richter, Gerlands Beitr. zur Geophysik **45**, 280, 1935. — [6] F. Hund, Ergebn. d. exakt. Naturw. **15**, 189 (Zusammenfassung). — [7] H. Jensen, ZS. f. Phys. **89**, 713, 1934; **93**, 232, 1935 (Fermi-Atom mit Austausch). — [7a] H. Jensen, ebenda **101**, 141, 1936, § 2 (Austauschkorrektion). — [7b] H. Jensen, ebenda **82**, 794, 1933 (relativistisches Fermi-Atom). — [8] H. Jensen, G. Meyer, H. Rohde, ebenda **110**, 277, 1938 (Ionenradien, numer. Lösungen der Fermi-Gleichung mit Austausch). — [9] B. Mrowka u. A. Recknagel, Phys. ZS. **38**, 758, 1937 (numer. Lösung der Fermi-Gleichung). — [10] J. C. Slater, Rev. Mod. Phys. **6**, 209, 1934 (electronic structure of metals). — [11] J. C. Slater u. H. M. Krutter, Phys. Rev. **47**, 559, 1935 (Thomas-Fermi method for metals). — [12] E. Tams, Grundzüge der physikal. Verhältnisse der festen Erde. I. Teil. Berlin 1932. — [13] E. Wiechert, Göttinger Nachrichten 280, 1924 (Über die Beschaffenheit des Erdinnern). — [14] E. Wigner u. F. Seitz, Phys. Rev. **43**, 804, 1933. — [15] Handbuch der Geophysik II, 1935, Kapitel 3 und 14.

(Mitteilung aus dem Max-Planck-Institut, Berlin-Dahlem.)

Magnetische Momente von $^{171, 173}$Yb und Isotopenverschiebung beim Yb I.

Von **H. Schüler** und **H. Korsching**[1]) in Berlin-Dahlem.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 1. November 1938.)

Es werden die magnetischen Momente von ^{171}Yb zu $\mu = +0{,}4_5$ und von ^{173}Yb zu $\mu = -0{,}6_5$ bestimmt. Das Verhältnis der magnetischen Momente beträgt $\frac{\mu_{173}}{\mu_{171}} = 1{,}4$. Es sind einige Betrachtungen über die Abweichungen der magnetischen Momente der Atomkerne vom Ein-Teilchenmodell angestellt. Aus λ 5556 ergibt sich für die $6\,s^2$-Konfiguration eine Isotopenverschiebung von etwa $30 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}. Durch Vergleich mit anderen Elementen ergibt sich für Yb II die Ionisierungsspannung zu 96180 ± 2000 cm^{-1}.

In einer kürzlich[2]) erschienenen Arbeit, deren Kenntnis im folgenden vorausgesetzt wird, haben die Verfasser und Herr J. Roig über Hyperfeinstrukturuntersuchungen an einigen Yb I-Linien berichtet. Aus den Strukturbildern der Linien λ 6489, λ 6799, λ 7699 konnten die HFS.-Niveaus von $6\,s\,7\,s\,{}^3S_1$, $6\,s\,6\,p\,{}^3P_{1,2}$ festgelegt werden.

Hieraus wurden außer den mechanischen Momenten von ^{171}Yb ($i = {}^1/_2$) und von ^{173}Yb ($i = {}^5/_2$) auch das Quadrupolmoment von ^{173}Yb ($q = +3{,}9 \cdot 10^{-24}$) bestimmt. Gleichzeitig haben wir darauf hingewiesen, daß es auf Grund des experimentellen Materials möglich ist, die magnetischen Momente von $^{171, 173}$Yb zu berechnen. Im folgenden sei diese Berechnung wiedergegeben.

Man kann aus verschiedenen Termen für ^{173}Yb zwei μ-Werte bestimmen.

Erstens lassen sich aus $6\,s\,6\,p\,{}^3P_1$ mit dem Aufspaltungsfaktor $a = -37{,}4$ und aus $6\,s\,6\,p\,{}^3P_2$ mit $a = -24{,}9$ nach Breit und Wills[3]) die Aufspaltungsanteile des s- und p-Elektrons unter Berücksichtigung der mittleren Kopplung berechnen. Es gelten folgende Beziehungen:

$$l \cdot (l+1)\, a_{^3P_1} = 1/2\,([l+1]\,c_2^2 - l\,c_1^2)\,a\,(s) + 1/2\,l\,(2\,l+3)\,c_1^2\,a' + 1/2\,(l+1)\,(2\,l-1)\,c_2^2\,a'' + 2\sqrt{l\,(l+1)}\cdot c_1\,c_2\,a''', \tag{1}$$

$$a_{^3P_2} = \frac{1}{2\,(l+1)} \cdot a\,(s) + \frac{2\,l+1}{2\,(l+1)} \cdot a', \tag{2}$$

[1]) Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft. — [2]) H. Schüler, J. Roig, H. Korsching, ZS. f. Phys. **111**, 165, 1938. — [3]) G. Breit, L. A. Wills, Phys. Rev. **44**, 470, 1933.

wo

$l = 1$ (Bahndrehimpuls des p-Elektrons);

$c_1 = 0{,}4742$ | Konstanten der mittleren Kopplung

$c_2 = 0{,}8804$ | (siehe oben zitierte Yb-Arbeit);

a' ($a_{p_{3/2}}$), der zu bestimmende Aufspaltungsfaktor des $p_{3/2}$-Elektrons;

a''' ($a_{p_{3/2}, p_{1/2}}$) und a'' ($a_{p_{1/2}}$) lassen sich nach Breit und Wills durch a' ausdrücken:

$$a'' = 7{,}54 \cdot a',$$
$$a''' = -0{,}32 \cdot a'.$$

Mit diesen Werten erhält man

$$a\,(6\,s) = -\,93{,}0,$$
$$a\,(6\,p_{3/2}) = -\,\;2{,}2.$$

Nun läßt sich aus $a\,(6\,s)$ nach Goudsmit und Fermi, Segrè[1]) $\mu_{^{173}\mathrm{Yb}}$ berechnen.

$$\mu = \frac{3 \cdot a\,(s) \cdot i \cdot n_{\mathrm{eff}}^3 \cdot 1{,}838}{8\,R\,\alpha^2 \cdot Z \cdot Z_0^2 \cdot \varkappa\,(j,Z) \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,n}\right)},$$

wo

$i = {}^5/_2$, mechanisches Moment von ^{173}Yb;

$n_{\mathrm{eff}}^3 = 9{,}75$. Aus der Termdifferenz von $6\,s\,{}^2S_{1/2}$ und $7\,s\,{}^2S_{1/2}$ $\Delta\nu = 54304$ (Meggers, Scribner l. c.) bestimmt sich durch Vergleich analoger Termdifferenzen in Spektren mit bekannter Ionisierungsgrenze (Li, Na, K, Rb, Cs; Cu, Ag, Au; Zn II, Cd II, Hg II) der absolute Termwert des Grundterms von Yb II zu 96180 ± 2000, und daraus $n_{\mathrm{eff}}^3 = 9{,}75$.

$R = 109737$, Rydberg-Konstante;

$\alpha = 7{,}28 \cdot 10^{-3}$, Feinstrukturkonstante;

$Z = 70$, Kernladungszahl;

$Z_0 = 2$ für erstes Funkenspektrum;

$\varkappa\,(j,Z) = 1{,}78$, relativistische Korrektur für das s-Elektron;

$\left(1 - \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,n}\right) = 1{,}1$ aus der obengenannten Ionisierungsgrenze von Yb II.

Mit diesen Größen ergibt sich für ^{173}Yb:

$$\mu_{(6\,s)} = -\,0{,}5.$$

Ebenso läßt sich aus dem Anteil des $6\,p$-Elektrons ($a_{6\,p_{3/2}} = -\,2{,}2$) nach der ebenfalls von Goudsmit und Fermi, Segrè angegebenen Formel das magnetische Moment berechnen.

[1]) S. Goudsmit, Phys. Rev. **43**, 636, 1933; E. Fermi, E. Segrè, ZS. f. Phys. **82**, 729, 1933.

Es ist:

$$\mu = \frac{a \cdot i \cdot j\,(j+1)\,(2\,l+1)\,Z_l^* \cdot 1{,}838 \cdot \lambda\,(l, Z^*)}{2\,l\,(l+1) \cdot \delta \cdot \varkappa\,(j, Z^*)}.$$

$a = a_{6\,p_{3/2}} = -2{,}2$;

$i = {}^5/_2$; $j = {}^3/_2$; $l = 1$; $Z^* = Z - 4 = 66$;

$\delta = 2113\ \mathrm{cm}^{-1}$, Dublettaufspaltung unter Berücksichtigung der Wolfeschen Korrektur (Wechselwirkung zwischen Spin des s- und Bahn des p-Elektrons);

$\lambda = 1{,}117$, relativistische Korrektur der Dublettaufspaltung des $6\,p$-Elektrons;

$\varkappa = 1{,}098$ relativistische Korrektur für das Matrixelement

$$(p_{3/2}\,|r^{-3}|\,p_{3/2}).$$

Daraus erhält man für ^{173}Yb:

$$\mu = -0{,}9.$$

Unter der Annahme, daß man beiden Werten gleiches Gewicht zubilligt, bekommt man:

$$^{173}\mathrm{Yb}: \quad \mu = -0{,}7.$$

Zweitens kann man aber auch aus dem $6\,s\,7\,s\,{}^3S_1$-Term einen Wert für das magnetische Moment von ^{173}Yb berechnen. Aus der Gesamtaufspaltung $\Delta\nu = 378 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-1}$ des $^3S_1$-Terms ergibt sich der Aufspaltungsfaktor $a\,(^3S_1) = -63$ (minus, weil Termlage umgekehrt). Hierin sind die Aufspaltungsfaktoren vom $6\,s$- und $7\,s$-Elektron enthalten. Um den Anteil des $6\,s$-Elektrons zu ermitteln, muß man auf $6\,s\,n\,s$, $n \to \infty$ extrapolieren. Solche Abschätzungen sind früher von Fermi und Goudsmit bei Hg und Cd gemacht worden; danach ist der Anteil des $7s$-Elektrons etwa 10% der Gesamtaufspaltung. Man erhält dann für ^{173}Yb $a\,(6s) = -113$ und mit der oben für s-Elektronen angegebenen Formel aus dem $^3S_1$-Term das magnetische Moment:

$$\mu\,(6s) = -0{,}6.$$

Wir möchten als Mittelwert für ^{173}Yb

$$\underline{\mu = -0{,}6_5}$$

angeben. Aus der Größe der Termaufspaltung von $^{171, 173}$Yb ergibt sich das Verhältnis der magnetischen Momente $\frac{\mu_{173}}{\mu_{171}} = 1{,}4$. Und somit bestimmt sich das magnetische Moment von ^{171}Yb zu:

$$\underline{\mu = +0{,}4_5}.$$

Damit sind die magnetischen Momente von zwei weiteren Kernen mit ungeradem Neutron bestimmt.

In den Fig. 1 und 2 sind für die bisher untersuchten schweren Atomkerne mit Na beginnend die magnetischen Momente in Abhängigkeit von den mechanischen aufgetragen. Fig. 1 zeigt die Elemente mit ungeradem Proton und Fig. 2 die mit ungeradem Neutron. Die Darstellungen zeigen:

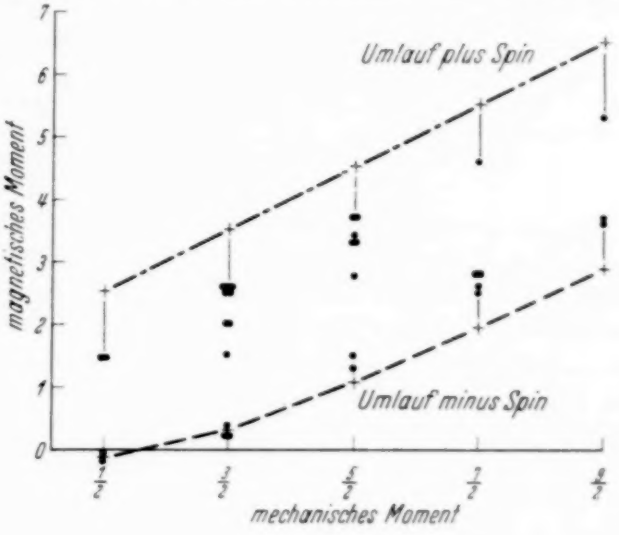


Fig. 1.

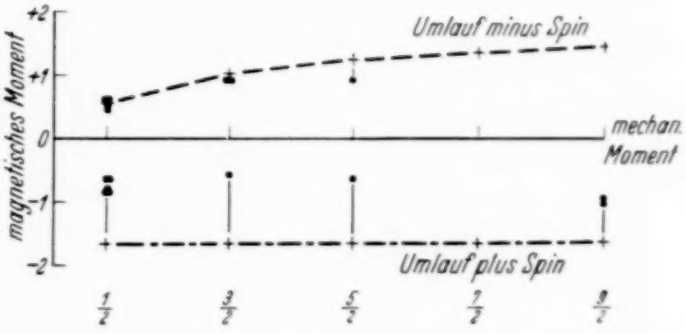


Fig. 2.

1. Umlauf und Spin des ungeraden Teilchens bestimmen in erster Näherung das magnetische Moment des Atomkerns[1]).

2. Es lassen die Mindestabweichungen vom Ein-Teilchenmodell Regelmäßigkeit[2]) erkennen. Der Vergleich der beiden Figuren zeigt, daß die Mindestabweichungen von entsprechenden Punkten des Ein-Teilchenmodells ähnlich sind. Es bleiben nämlich sowohl für ungerades Proton wie für ungerades Neutron für Umlauf plus Spin die Mindestabweichungen mit wachsendem i (Kernspin) etwa gleich; und für Umlauf minus Spin fällt für $i = {}^1/_2$ der gefundene Wert mit dem Wert des Ein-Teilchenmodells zusammen, mit wachsendem i steigt in beiden Fällen die Mindestabweichung.

Man sieht daraus, daß die Wechselwirkung zwischen Rumpf und ungeradem Teilchen, die die Abweichung vom Ein-Teilchenmodell verursacht, für Proton und Neutron ungefähr gleich ist.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß beim Yb I auch eine meßbare Isotopenverschiebung existiert. Bei der Linie λ 5556 ($6s^2\,{}^1S_0 - 6s\,6p\,{}^3P_1$), deren Strukturbild und Termschema in Fig. 3 wiedergegeben sind, erscheinen die Isotopen getrennt. Aus Fig. 4 sieht man, daß die Verschiebung zwischen zwei aufeinanderfolgenden geraden Isotopen etwa

[1]) H. Kallmann, H. Schüler, ZS. f. Phys. **88**, 210, 1934; H. Schüler, ebenda, S. 323. — [2]) H. Schüler, ebenda **107**, 12, 1937.

$30 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-1}$ beträgt. Aus früheren Beobachtungen[1]) geht hervor, daß die Isotopenverschiebung vom $6s^2$-Term herrührt. Die Isotopenterme liegen in der gleichen Reihenfolge wie beim Hg, jedoch ist zu beachten, daß beim Hg die Verschiebung, obwohl auch durch eine $6s^2$-Konfiguration hervorgerufen, fünfmal größer ist als beim Yb.

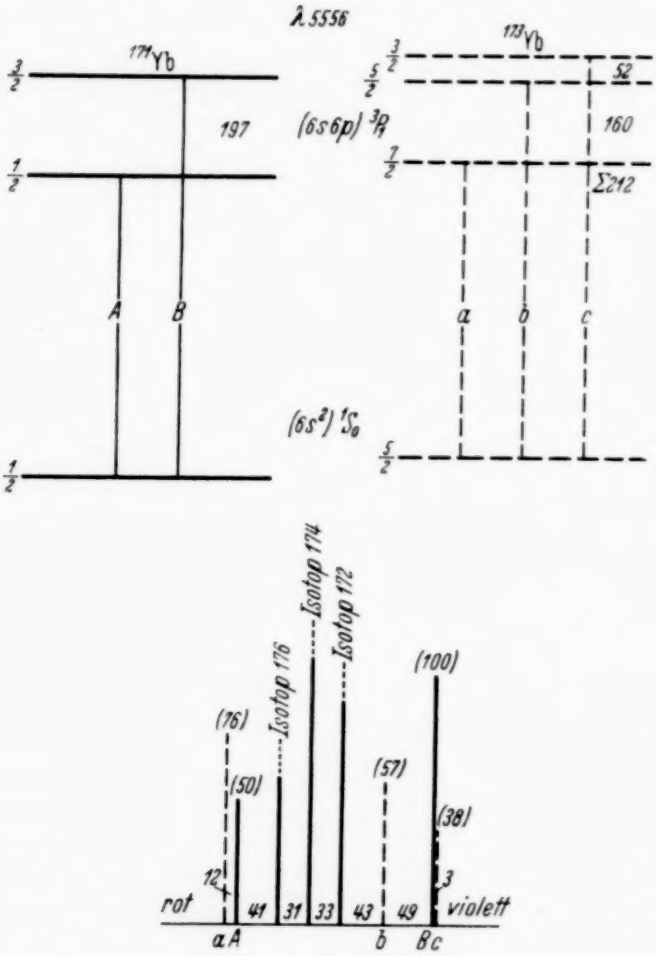


Fig. 3.

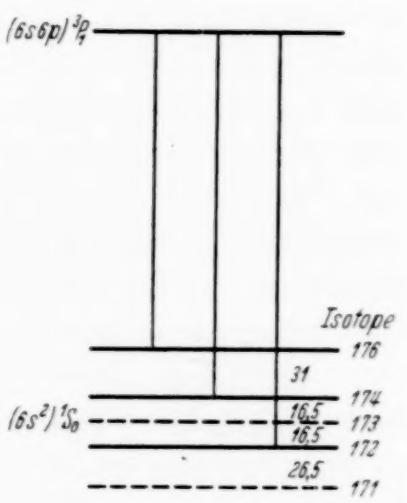


Fig. 4. Lage der Schwerpunkte der Isotope bei λ 5556.

Ein Teil der benutzten Apparate stammt aus den Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft, der wir sehr zu Dank verpflichtet sind. Der eine von uns (H. Korsching) dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Zuerteilung eines Stipendiums.

Die Untersuchung wurde mit der dankenswerten Unterstützung der I. G. Farbenindustrie, Ludwigshafen-Oppau, durchgeführt.

[1]) H. Schüler, J. E. Keyston, ZS. f. Phys. **72**, 423, 1931.

Refraktion und Dispersion des Chlorwasserstoffs, Bromwasserstoffs und Schwefelwasserstoffs und der isotopen schweren Moleküle DCl, DBr und D_2S.

Von **Tage Larsén**, Lund.

(Eingegangen am 2. November 1938.)

Der Dispersionsverlauf der oben angegebenen Verbindungen wird vom Sichtbaren bis ins Ultraviolett experimentell bestimmt. Bei Chlorwasserstoff wurde bis zur Quecksilberlinie 2302 Å, bei Bromwasserstoff und Schwefelwasserstoff wegen der Absorption nur bis 2447 bzw. 2346 Å gemessen. Die Versuchsergebnisse werden mit zweigliedrigen Formeln, deren Konstanten in Beziehung zur heutigen Kenntnis der Resonanzbandenzüge dieser Moleküle gesetzt werden, dargestellt. Die schweren Moleküle weisen einen ähnlichen Isotopieeffekt, wie es früher bei D_2 und CD_4 gefunden worden ist, auf, d. h. eine Verminderung des Absolutwertes der Refraktion und flachere Dispersionskurven. Das durch die Änderung des Grundniveaus beim Übergang vom leichten zum schweren Isotop erforderte kurzwelligere Einsetzen des ultravioletten Absorptionskontinuums wird im Dispersionsverlauf des Bromwasserstoffs und Schwefelwasserstoffs nachgewiesen.

Moleküle, die Verbindungen von Wasserstoff und einem anderen Atom sind, besitzen dank der speziellen Natur des Wasserstoffs gewisse charakteristische Eigenschaften. Diese Verbindungen (z. B. OH) sind im allgemeinen nicht stabil; nur solche wie CH_4, H_2O, HJ usw., die Edelgasnatur haben, sind beständig. Das Verhalten dieser edelgasähnlichen Moleküle ist betreffs der Refraktion und Dispersion von Wolf[1]) (HCl, HBr und HJ) erörtert worden. Die gewonnenen Resultate leiden jedoch wegen des kleinen Meßbereiches an einer gewissen Unsicherheit. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb der Dispersionsverlauf von Chlorwasserstoff, Bromwasserstoff und Schwefelwasserstoff bis zu der im Ultravioletten eintretenden Absorption, die eine Grenze für weiteres Vordringen setzt, experimentell bestimmt. Teilweise konnte auch im Absorptionsgebiet gemessen werden. Gleichzeitig wurden die isotopen Moleküle unter möglichst gleichen Versuchsbedingungen untersucht.

Die Messungen wurden mit einem Jaminschen Interferenzrefraktometer mit Quarzoptik in derselben Weise wie früher ausgeführt[2]). Die experimentellen Schwierigkeiten werden hauptsächlich durch die starke Affinität und die Zerfallsneigung der untersuchten Gase bedingt, was die Anwendung

[1]) K. L. Wolf, Ann. d. Phys. **81**, 637, 1926. — [2]) T. Larsén, ZS. f. Phys. **88**, 389, 1934; **100**, 543, 1936; **105**, 164, 1937.

von gefetteten Hähnen, Schlauchverbindungen usw. ausschließt. Unter den Halogenwasserstoffen greift ja Fluorwasserstoff Glas an, und Jodwasserstoff zerfällt schnell, besonders bei Bestrahlung mit ultravioletten Licht, was auch in geringerem Maße mit Bromwasserstoff und Schwefelwasserstoff der Fall ist. Die gereinigten Gase wurden deshalb in fester oder flüssiger Form aufbewahrt und kamen bei den Messungen nur mit Glas und Quecksilber in Berührung. Das Absperren des Gases geschah durch Quecksilberventile, und die erforderlichen Druckänderungen wurden durch langsames Absieden bzw. Kondensieren bewirkt.

Die Darstellung aller Gase geschah im Vakuum, d. h. ohne Zutritt von Luft. Die Ausgangsmaterialien waren die reinsten im Handel erhältlichen. Chlorwasserstoff wurde aus geschmolzenem Natriumchlorid und konzentrierter Schwefelsäure hergestellt und passierte dann eine Falle, die mit Kohlensäureschnee in Alkohol gekühlt war. Bromwasserstoff wurde aus Phosphorpentabromid und Wasser sowie durch weitere Reinigung mit rotem Phosphor und nach Trocknung mit Phosphorpentoxyd erhalten. Schwefelwasserstoff wurde durch Zersetzung von Calciumsulfid mit Wasser bei Anwesenheit von Magnesiumchlorid gewonnen. Nach Kondensierung mit flüssiger Luft wurden alle Gase einer sorgfältigen Reinigung durch Fraktionierung unterworfen. Für die isotopen Substanzen wurde eine möglichst analoge Herstellungsweise angewandt. Die Ausgangsmaterialien D_2O (99,6% D_2) und D_2SO_4 (99,5% D_2) waren von Norsk Hydroelektrisk Kvaelstoffaktieselskab bezogen.

Die Gase werden durch das ultraviolette Licht (Quarz-Quecksilberlampe) langsam zersetzt. Chlorwasserstoff und Schwefelwasserstoff erfahren bei den vorliegenden Belichtungszeiten (etwa 4 bis 5 Minuten) keine merkliche Beeinflussung. Bromwasserstoff zerfiel jedoch merklich, weshalb die Belichtungszeiten in diesem Falle auf etwa 2 Minuten vermindert wurden. Die Resultate bei diesem Gase sind deshalb mit etwas größeren Meßfehlern behaftet.

Wegen der recht unvollständigen Kenntnis der Abweichungen dieser Gase von den idealen Zustandsgesetzen ist die Reduktion der Versuche auf andere Temperaturen und Drücke als diejenigen, die bei den Messungen herrschten, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Streng genommen muß der Brechungsindex nicht nur als Funktion der Dichte, sondern auch als Funktion des Druckes und der Temperatur behandelt werden, was man jedoch in den betreffenden Druck- und Temperaturintervallen zu vernachlässigen pflegt. Um diese Schwierigkeiten möglichst zu beseitigen, wurden bei den Messungen die Temperatur nahe 20^0 mit einer maximalen Abweichung

von $0{,}5^0$ (nicht zu verwechseln mit der Temperaturvariation bei einer einzelnen Messung, die kleiner war als $0{,}03^0$) und die Druckdifferenzen nahe 760 mm Hg gehalten. Die Reduktion auf 20^0 und 760 mm Hg wird so mit Fehlern behaftet, die wesentlich geringer als die direkten Meßfehler sind. Um die Zählung der Interferenzstreifen zu erleichtern, wurden einige Versuche gemacht, bei denen der Druck von 0 bis 1 Atm. in Intervallen von je etwa 0,1 Atm. geändert wurde. Diese Meßreihen geben auch eine Möglichkeit zur Kontrolle der Korrektionen.

Der Brechungsindex n_{20} (20^0, 760 mm Hg) ist aber nicht der in der Literatur gewöhnlich angegebene. Für die Reduktion zu n_0 (0^0, 760 mm Hg) ist die Kenntnis des Ausdehnungskoeffizienten α zwischen 0 und 20^0 erforderlich. Die folgenden Werte wurden angenommen (Extrapolation aus den Werten in Critical Tables): $HCl - 0{,}003761$, $H_2S - 0{,}00381$[1]). Der Koeffizient des Bromwasserstoffs, der anscheinend noch nicht gemessen wurde, wurde dem von H_2S gleichgesetzt, da diese beiden Gase ungefähr dieselben kritischen Konstanten haben. Man pflegt außerdem die Abweichung vom ideellen Zustand durch Division mit einem Faktor $1 + \lambda$, der die Kompressibilität des Gases angibt, zu korrigieren. Man erhält so n_i, das sich auf 0^0 und auf eine solche Dichte bezieht, daß in 22,414 Liter ein Mol enthalten ist. Diese letzte Bedingung unterscheidet sich nur unmerklich von Cuthbertsons normaler Dichte. Es wurde für $1 + \lambda$ gesetzt $HCl - 1{,}00748$, $HBr - 1{,}00932$ und $H_2S - 1{,}0104$[2]). α und $1 + \lambda$ wurden bei entsprechenden isotopen Gasen gleich angenommen. Zwischen den verschiedenen Brechungsindizes besteht also die Beziehung:

$$(n_{20} - 1) \cdot (1 + \alpha \cdot 20) = (n_0 - 1), \quad (n_0 - 1)/(1 + \lambda) = (n_i - 1).$$

Die Anzahl der bei den Absolutmessungen der grünen Hg-Linie gezählten Streifen betrug bei Chlorwasserstoff etwa 700, bei Bromwasserstoff 330 und bei Schwefelwasserstoff 350. Das Resultat der Absolutmessungen mit mittleren Fehlern aus etwa 25 Einzelmessungen gibt Tabelle 1.

Tabelle 1. Absolutmessungen bei der grünen Hg-Linie 5462,25 Å.

	$(n_{20} - 1) \cdot 10^6$	$(n_0 - 1) \cdot 10^6$	$(n_i - 1) \cdot 10^6$
HCl	$419{,}70 \pm 0{,}05$	451,27	447,92
DCl	$418{,}66 \pm 0{,}05$	450,15	446,81
HBr	$578{,}09 \pm 0{,}15$	622,14	616,40
DBr	$577{,}12 \pm 0{,}15$	621,10	615,36
H_2S	$604{,}61 \pm 0{,}04$	650,68	643,98
D_2S	$601{,}87 \pm 0{,}04$	647,73	641,06

[1]) Crit. Tables III, S. 16. — [2]) Landolt-Börnstein. Eg. I, S. 163.

Die Dispersionsmessungen findet man in Tabelle 2. Sie beziehen sich auf n_i. Wird der Dispersionsverlauf in einem der anderen Indizes gewünscht, so ist nur mit dem entsprechenden Verhältnis für die Linie 5462,25 Å zu multiplizieren. Bei Messungen in dem Absorptionsgebiet konnten natürlich nicht so viele Streifen, wie es oben für die Absolutmessungen angegeben wurde, gezählt werden. Bei den äußersten ultravioletten Linien mußte man sich sogar auf höchstens fünf Streifen der grünen Linie beschränken. Dies setzt natürlich die Genauigkeit im Verhältnis zu den Linien außerhalb der Absorption entsprechend herab.

Tabelle 2. Dispersionsmessungen.

λ in Å	$(n_i - 1) \cdot 10^6$					
	HCl	DCl	HBr	DBr	H_2S	D_2S
5677,40	446,906	445,872	614,56	613,72	641,951	639,007
5462,25	447,920	446,810	616,40	615,36	643,980	641,060
4917,41	450,939	449,810	621,67	620,59	650,498	647,387
4109,25	458,071	456,984	634,37	633,31	665,939	662,753
3802,72	462,269	461,095	641,99	640,70	675,216	671,874
3342,44	471,090	469,806	657,91	656,67	695,516	691,998
2926,25	483,825	482,513	681,48	680,18	726,963	722,962
2894,45	485,025	483,777	683,81	682,46	730,310	726,226
2760,54	491,025	489,709	694,70	693,66	746,415	742,036
2753,60	491,355	490,042	695,74	694,36	747,374	742,962
2675,78	495,364	493,968	703,63	702,00	759,033	754,328
2577,07	501,222	499,784	716,01	714,35	777,456	771,949
2464,81	509,055	507,610	762	754	806,25	799,06
2447,65	510,413	508,885	774	759	811,98	804,16
2380,74	516,105	514,545			837,3	828,0
2346,17	519,286	517,622			879	847
2302,83	523,525	521,884				

Die Versuchsergebnisse stimmen in dem gemeinsamen sichtbaren Wellenlängengebiet mit den bereits vorliegenden Messungen, insbesondere mit dem Isotopieeffekt bei DCl[1]) und D_2S[2]) vortrefflich überein.

Chlorwasserstoff fängt unterhalb 2300 Å, Bromwasserstoff bei 2800 Å und Schwefelwasserstoff bei 2600 Å zu absorbieren an. Die Messungen reichen also bis nahe an die Absorptionsgebiete; teilweise auch weiter. Dies hat zur Folge, daß die Darstellung durch Dispersionsformeln sich nur schwer durchführen läßt. Doch sind zweigliedrige Formeln berechnet worden.

[1]) O. E. Frivold, O. Hassel u. S. Rustad, Phys. ZS. **38**, 191, 1937. — [2]) O. E. Frivold, O. Hassel u. E. Hetland, ebenda **39**, 224, 1938.

welche die Dispersionskurven der absorptionsfreien Gebiete ziemlich gut wiedergeben. Sie lauten für die „leichten" Verbindungen:

$$(\mathrm{HCl}) \quad R = \frac{3}{2} \cdot \frac{n_i^2 - 1}{n_i^2 + 2} = \frac{691\,469 \cdot 10^{-4}}{582\,276 - \lambda^{-2} \cdot 10^{-4}} + \frac{6\,700\,147 \cdot 10^{-4}}{2\,115\,289 - \lambda^{-2} \cdot 10^{-4}}, \quad (1)$$

$$(\mathrm{HBr}) \quad R = \frac{744\,808 \cdot 10^{-4}}{473\,523 - \lambda^{-2} \cdot 10^{-4}} + \frac{685\,294 \cdot 10^{-4}}{156\,674 - \lambda^{-2} \cdot 10^{-5}}, \quad (2)$$

$$(\mathrm{H_2S}) \quad R = \frac{254\,517 \cdot 10^{-4}}{300\,213 - \lambda^{-2} \cdot 10^{-4}} + \frac{677\,605 \cdot 10^{-4}}{126\,880 - \lambda^{-2} \cdot 10^{-5}}. \quad (3)$$

Tabelle 3. Die Differenz Δ zwischen den beobachteten bzw. berechneten Refraktionswerten und das Verhältnis f der Refraktionswerte der „leichten" bzw. „schweren" Verbindungen als Funktion der Wellenlänge.

λ in Å	HCl	HBr	H_2S	f		
	$\Delta \cdot 10^9$	$\Delta \cdot 10^8$	$\Delta \cdot 10^9$	HCl — DCl	HBr — DBr	H_2S — D_2S
5677,40	— 26	— 4	— 98	1,002 25	1,001 44	1,004 61
5462,25	+ 33	+ 10	— 64	2 48	1 69	4 55
4917,41	+ 7	± 0	+ 55	2 51	1 75	4 81
4109,25	— 34	— 5	+ 54	2 38	1 68	4 81
3802,72	+ 22	+ 13	+ 151	2 55	2 01	4 97
3342,44	— 15	— 2	+ 54	2 73	1 88	5 08
2926,25	— 17	— 1	— 69	2 72	1 90	5 53
2894,45	— 79	— 5	— 23	2 58	1 97	5 62
2760,54	— 14	— 15	+ 53	2 69	1 80	5 90
2753,60	— 22	± 5	+ 73	2 68	1 99	5 94
2675,78	— 45	+ 24	+ 291	2 83	2 04	6 24
2577,07	— 20	+ 138	+ 1 291	2 88	2 31	7 13
2464,81	— 16	+ 3200	+ 4 800	2 85	12 00	8 99
2447,65	+ 10	+ 4200	+ 5 980	3 00	21 00	9 72
2380,74	+ 110		+ 11 300	3 03		11 20
2346,17	+ 128		+ 41 000	3 14		38 00
2302,83	+ 99			3 14		

In Tabelle 3 findet man die Differenzen zwischen den aus den Formeln berechneten und den experimentellen Werten. Im Absorptionsgebiet ist natürlich die Übereinstimmung am kleinsten, aber auch außerhalb scheinen noch systematische Abweichungen vorzuliegen. In die folgende Erörterung, die übrigens nicht den Anspruch erhebt erschöpfend zu sein (eine ausführliche Arbeit soll folgen), wird die infrarote Absorption, deren Bedeutung bei HCl R. Rollefson und A. H. Rollefson[1]) erwiesen haben, nicht einbezogen. Wolf hat auf Grund der Messungen von Cuthbertson[2]) zweigliedrige Formeln für HCl, HBr und HJ berechnet, um die maßgebenden

[1]) R. Rollefson u. A. H. Rollefson, Phys. Rev. **48**, 779, 1935. — [2]) C. u. M. Cuthbertson, Phil. Trans. London (A) **213**, 1, 1913.

ultravioletten Absorptionsfrequenzen zu bekommen. Es ist aber zweifelhaft, ob seine Resultate weitgehende Schlüsse über die Lage und Intensität zulassen. Der Verfasser ist der Ansicht, daß, wenn die Messungen sich nur über das Sichtbare erstrecken, höchstens zwei Konstanten (eingliedrige Formeln) einigermaßen sicher bestimmt werden können.

Im Wellenlängengebiet der vorliegenden Untersuchung kann noch eine weitere Konstante berechnet werden. Da die zweigliedrigen Formeln vier Konstanten enthalten, muß eine davon ziemlich willkürlich sein; man nimmt deshalb eine Eigenfrequenz im voraus als gegeben an und berechnet dann die übrigen drei Konstanten. Die willkürliche Eigenfrequenz legt man an eine Stelle, wo kräftige Absorption zu erwarten ist. Dieses Verfahren ist früher mit Erfolg bei den Edelgasen angewandt worden[1]). Dabei hat man die Resonanzlinien gewählt, denen besonders große Oszillatorenstärken zukommen.

Man könnte annehmen, eine analoge Behandlung sei auch bei den in der vorliegenden Arbeit behandelten edelgasähnlichen Gasen möglich. Als Wolf seine Berechnungen ausführte, waren bei den betreffenden Molekülen nur die Ionisierungsspannungen bekannt, die übrigens bei den Halogenwasserstoffen nach späteren spektroskopischen Messungen mit beträchtlichen Fehlern behaftet sein dürften. Die Ionisierungsspannungen entsprechen eher der Eigenfrequenz einer eingliedrigen Formel, was tatsächlich auch zutrifft. Man kann jedoch aus den vorliegenden Absorptionsmessungen Anhaltspunkte für die Lage einiger maßgebenden Eigenwellenlängen finden. Die Ultraviolettabsorption dieser Gase im Schumann-Gebiet ist erst vor kurzem von Price geklärt worden. Er hat H_2O, H_2S[2]) und HCl, HBr, HJ[3]) untersucht. Die Sprekten sind erstaunlich analog gebaut. Die intensivste Absorption entfällt auf starke, relativ diskrete Resonanzbanden, die sich in Rydberg-Serien, die zu der doppelten Ionisierungsspannung konvergieren, einordnen lassen. Die Banden haben nur unbedeutende Vibrationsstruktur, was der Natur des beteiligten Elektrons zugeschrieben wird. Die ersten (langwelligsten) Banden sind am intensivsten, und man kann also annehmen, daß sie weitaus die größten Oszillatorenstärken besitzen. Die äußere Ähnlichkeit mit den Resonanzspektren der Edelgasatome ist also ausgeprägt und ist am größten bei HJ. Die beiden kräftigen Rydberg-Serien der Halogenwasserstoffe (*B*- und *C*-Banden nach Price) beginnen

[1]) K. F. Herzfeld u. K. L. Wolf, Ann. d. Phys. **76**, 76, 567, 1925; T. Larsén, ZS. f. Phys. **88**, 389, 1934; W. Kronjäger, ebenda **98**, 17, 1935. — [2]) W. C. Price, Journ. Chem. Phys. **4**, 147, 1936. — [3]) W. C. Price, Proc. Roy. Soc. London (A) **167**, 216, 1938.

somit mit zwei starken Resonanzbanden, welche den Resonanzlinien der Edelgase entsprechen sollten. In den oben angegebenen zweigliedrigen Formeln (1) und (2) des Chlorwasserstoffs und Bromwasserstoffs ist eine Eigenfrequenz gleich dem Mittelwert der Frequenzbeträge der Q-Zentren dieser Banden (B_1 und C_1) angenommen worden, nämlich HCl — 76307 cm^{-1} und HBr — 68813 cm^{-1}. Bei Schwefelwasserstoff liegen die Verhältnisse etwas komplizierter. In dem von Price untersuchten Spektralgebiet liegen die ersten starken Absorptionsbanden in der Umgebung von 1450 Å. Wählt man die willkürliche Eigenfrequenz an dieser Stelle, so bewirkt dies aber, daß ein Glied in der Dispersionsformel negativ wird, was weniger wahrscheinlich ist. Die Meßergebnisse können aber einwandfrei mit einer Eigenfrequenz von etwa 1800 Å [Formel (3)] wiedergegeben werden. Price gibt mehrere Serien von Banden (A, B, C, D und E) an. Die langwelligsten Glieder der C- und D-Banden liegen aber nach Price nicht in dem von ihm untersuchten Wellenlängengebiet, sondern er berechnet ihre Lage auf etwa 2000 Å. Möglicherweise sind es diese Absorptionsbanden (C_1 und D_1), welche die größten Oszillatorenstärken haben und also dem ersten Glied der Dispersionsformel (3) entsprechen, die übrigens hauptsächlich empirisch gefunden worden ist.

Die Formeln weisen interessante Eigenschaften auf. Hier soll aber nur auf die Gleichheit der Zähler hingewiesen werden. Die Übereinstimmung zwischen Formeln und experimentellen Werten ist natürlich nur in den absorptionsfreien Gebieten zu erwarten. Wenn man das Absorptionsgebiet erreicht hat, wächst der Brechungsindex anomal stark mit abnehmender Wellenlänge. Dies geht daraus hervor, daß die aus den Dispersionsformeln berechneten Werte um so mehr die gemessenen unterschreiten, je weiter man ins Absorptionsgebiet hineinkommt (Tabelle 3). Diese im nahen Ultraviolett liegende kontinuierliche Absorption, die in die obige Diskussion über die für den Verlauf der Dispersion maßgebenden Absorptionsfrequenzen nicht einbezogen worden ist, ist von Goodeve und Taylor[1]) bei Bromwasserstoff und Jodwasserstoff quantitativ gemessen worden. Sie entspricht Übergängen vom stabilen Grundzustand des Moleküls zu instabilen Zuständen mit Abstoßungskurven, die wie der Grundzustand in normale Atome dissoziieren. Wenn der beim Absorptionsvorgang angeregte Zustand durch eine reine Abstoßungskurve repräsentiert wird, was also bei Bromwasserstoff der Fall ist, kann man gewisse Veränderungen erwarten, wenn der gewöhnliche Wasserstoff durch Deuterium ersetzt wird. So rührt die

[1]) C. F. Goodeve u. A. W. Taylor, Proc. Roy. Soc. London (A) **152**, 221, 1935; **154**, 181, 1936.

Veränderung des Aussehens der Absorptionskurve beim Übergang vom leichten zum schweren Isotop hauptsächlich von zwei Tatsachen her, nämlich teils vom Sinken des Grundschwingungsniveaus durch Verminderung der Nullpunktsenergie, teils von einer Änderung der diesem Niveau zugehörigen Eigenfunktion. Die erste Eigenschaft bewirkt eine Verschiebung des Schwerpunktes des Absorptionsgebietes (als ein Ganzes betrachtet) nach kürzeren Wellen, die zweite äußert sich in einem kurzwelligeren Einsetzen der langwelligen Absorptionskante, als man es sonst erwarten würde. Bates, Halford und Anderson[1]) haben bei Bromwasserstoff und Jodwasserstoff eine solche Verschiebung festgestellt. Auch Wasserdampf zeigt ein ähnliches Verhalten[2]). Wegen des analogen Baues des Schwefelwasserstoffmoleküls kann man einen entsprechenden Effekt bei dem bei 2600 Å einsetzenden Absorptionskontinuum dieses Gases erwarten. Betrachtet man das Verhältnis der Refraktionswerte der leichten bzw. schweren Verbindungen als Funktion der Wellenlänge (Tabelle 3), so findet man zunächst, daß innerhalb des absorptionsfreien Wellenlängengebietes dieses Verhältnis mit abnehmender Wellenlänge langsam wächst, d. h. das schwerere Isotop hat eine etwas flacher verlaufende Dispersionskurve. Wie schon früher angegeben, steigt die Dispersionskurve anomal stark innerhalb des Absorptionsgebietes, aber es geht aus Tabelle 3 hervor, daß dieses starke Anwachsen langwelliger beim leichten als beim schweren Isotop eintritt, denn auch das Verhältnis zwischen einander entsprechenden Refraktionswerten weist ein ähnliches Anwachsen auf. Der Effekt ist unzweifelhaft der eben besprochenen Verschiebung der Absorptionskante zuzuschreiben, deren Rückwirkung auf den Dispersionsverlauf somit nachgewiesen ist.

Für die experimentelle Ausstattung und für stetiges Interesse bei der Durchführung meiner Arbeit bin ich dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Dr. John Koch, zu großem Dank verpflichtet.

Lund, Physikalisches Institut, Oktober 1938.

---

[1]) J. R. Bates, J. O. Halford u. L. C. Anderson, Journ. Chem. Phys. **3**, 415, 531, 1935. — [2]) J. Franck u. R. Wood, Phys. Rev. **45**, 667, 1934.

Steuerung von Elektronenströmen mit einem Dreielektrodenkristall und ein Modell einer Sperrschicht.

Von **R. Hilsch** und **R. W. Pohl** in Göttingen.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 4. November 1938.)

Allgemeines über Elektronenleitung in KBr-Kristallen. Modell eines Gleichrichters und das Wesen einer Sperrschicht. Der Abbau einer einmal gebildeten Sperrschicht verläuft grundsätzlich anders als der Aufbau. Teilweise Gleichrichtung von technischem Wechselstrom schon mit einem Kristall von 1 cm Dicke. Vergleich des Modell-Gleichrichters mit dem Cu_2O-Trockengleichrichter, der mit Ersatzleitung arbeitet. Einbau eines Steuergitters in eine Sperrschicht und Messung der Kennlinien des so gebildeten Dreielektroden-Kristalles.

1. Aufgabe. Die Steuerung elektrischer Ströme ist mit einer anderen Aufgabe, der Gleichrichtung von Wechselströmen, innerlich verknüpft. In beiden Fällen muß die Leitung überwiegend von Elektrizitätsträgern *eines* Vorzeichens herrühren und diese dürfen nur aus *einer* der beiden Elektroden austreten. Die andere Elektrode muß für den Austritt der Träger gesperrt sein.

Am besten wird diese Bedingung in Vakuumröhren mit einer glühenden Kathode erfüllt. Doch kann man auch bei gleichzeitiger Anwesenheit von Ionenströmen, also in gasgefüllten Entladungsröhren, gute Ergebnisse erzielen. Bekannt ist endlich auch für den Zweck der *Gleichrichtung* die Anwendung fester Körper, nämlich von Kristallen mit überwiegender Elektronenleitung. Wir nennen die Trockengleichrichter aus Selen oder Kupferoxydul.

Ein befriedigendes Modell für diese festen Gleichrichter fehlt bisher. — Unseres Wissens fehlt ferner eine Steuerung elektrischer Ströme in festen Körpern mit Hilfe eines Steuergitters. Auf die grundsätzliche Möglichkeit haben wir schon vor Jahren hingewiesen[1]). Mehrere Anfragen von technischer Seite veranlassen uns jetzt, einige Versuche mitzuteilen. Sie sind mit Hilfe von Kaliumbromidkristallen ausgeführt worden. Diese Kristalle haben uns schon bei unseren bisherigen Arbeiten[2]) über die Elektronenleitung in festen Körpern vortreffliche Dienste geleistet. Zuletzt haben wir mit ihrer Hilfe die Entstehung der lichtelektrischen Sekundärströme qualitativ und quantitativ aufklären können[3]). — In dieser Mitteilung

[1]) Göttinger Nachr., Jahresbericht über das Geschäftsjahr 1933/34, S. 49. Festrede vom 18. November 1933. — [2]) Zusammenfassende Darstellung: Phys. ZS. **39**. 36. 1938. — [3]) ZS. f. Phys. **108**, 55. 1937.

bringen wir ein Modell eines Sperrschicht-Gleichrichters und seine Steuerung durch ein eingebautes Gitter. Wir wollen dem Dreielektrodenrohr einen Dreielektrodenkristall an die Seite stellen.

2. Allgemeines über Elektronenleitung in KBr-*Kristallen.* Ein KBr-Kristall ist im allgemeinen ein elektrolytischer Leiter. Seine Leitfähigkeit steigt exponentiell mit der Temperatur. Sie beträgt beispielsweise bei 490° C rund $2 \cdot 10^{-7}$ $\text{Ohm}^{-1}\,\text{cm}^{-1}$. Durch geeignete Wahl der Kathode kann man dem Ionenstrom einen um Zehnerpotenzen größeren Elektronenstrom überlagern.

Die Elektronen diffundieren im elektrischen Felde zur Anode. Die Wanderung wird durch häufige Ruhepausen unterbrochen. In diesen sind die Elektronen mit positiven Ionen zu „Farbzentren" vereinigt, d. h. (im einfachsten und hier ausreichenden Bilde) zu neutralen Metallatomen. Die Farbzentren machen die Bahn der diffundierenden Elektronen sichtbar[1]).

Die Wanderungsgeschwindigkeit der Farbzentren wird ganz überwiegend durch die Aufenthalte der Elektronen in der Farbzentrenbindung bestimmt. Sie beträgt in KBr von 490° etwa 10^{-3} cm/sec im Felde 1 Volt/cm. Bei 100 Volt Spannung durchläuft also ein Elektron den Elektrodenabstand von 1 cm in etwa 10 Sekunden. Das Verhältnis

$$\delta = \frac{\text{Elektronenstrom}}{\text{Ionenstrom}}$$

läßt sich in weiten Grenzen variieren. Der Elektronenstrom (Zähler) findet seine Grenze nur durch die höchste zulässige Stromwärme. Der Ionenstrom (Nenner) läßt sich durch Wahl der Temperaturen variieren. Bei tiefen Temperaturen kann der Kristall praktisch zum Isolator werden.

Wir haben für die später folgenden Messungen δ-Werte von etwa 30 benutzt, für qualitative Beobachtungen bis zu 1000.

3. Modell eines Gleichrichters und das Wesen einer Sperrschicht. Gegeben sei ein KBr-Kristall zwischen zwei Plattenelektroden. Bei geeigneter Wahl der Kathode, so hieß es oben, kann neben dem Ionenstrom ein Elektronenstrom entstehen. Eine geeignete Kathode besteht aus einem elektropositiven Metall, z. B. Calcium. Sie liefert einen kräftigen Elektronenstrom. Physikalisch sagt man: Das Ca kann Elektronen abgeben. Chemisch heißt es: Ca vermag dem KBr Brom zu entziehen und Kalium in Freiheit zu setzen. Die K-Atome dissoziieren in Ionen und Elektronen und die Elektronen diffundieren zur Anode.

[1]) O. Stasiw, Göttinger Nachr., Math.-phys. Kl. II, S. 261, 1932.

Ein elektronegatives Metall, z. B. Pt, ist als Kathode ungeeignet, es bildet eine „Sperrelektrode". Physikalisch sagt man: Pt kann keine Elektronen abgeben. Chemisch heißt es: Pt vermag dem KBr kein Brom zu entziehen und daher kein K in Freiheit zu setzen. —

Fortan benutzen wir nur KBr-Kristalle mit zwei verschiedenen Elektroden, einer elektronenliefernden und einer Sperrelektrode. Die Fig. 1 zeigt ein Beispiel. Es liegt nahe, das Ca-Blech durch ein noch mehr elektropositives Metall zu ersetzen, nämlich durch Kalium selbst oder durch eine

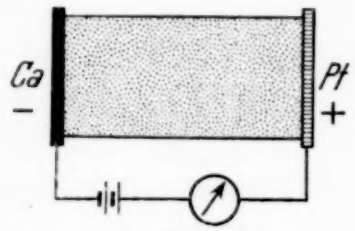


Fig. 1.

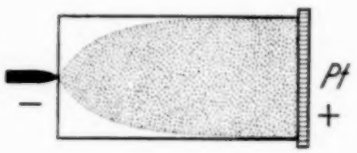


Fig. 2.

Fig. 1 und 2. KBr-Kristalle mit zwei verschiedenartigen Elektroden. Die Elektrode aus Ca und die mit einer K-Legierung überzogene Spitze können Elektronen in den Kristall eintreten lassen. Die Platinplatten *P* können das nicht, sie sind „Sperrelelektroden". Elektrodenabstand 1 cm.

Kaliumlegierung. Das läßt sich experimentell in verschiedener Weise ausführen. Am einfachsten geht man von einer beliebigen Metallspitze aus, etwa aus Stahl oder Platin: Diese erfährt durch das hohe elektrische Feld in ihrer Nähe eine „Formierung". D. h. die Spitze überzieht sich elektrolytisch mit einer Kaliumlegierung. Eine solche Anordnung ist in Fig. 2 skizziert. In beiden Figuren soll die punktierte Wolke die Farbzentren andeuten und damit die Bahn der Elektronen.

Nach einem Wechsel der Feldrichtung wird die Sperrelektrode (Platinblech) Kathode, die Farbzentren wandern heraus, der Kristall wird schließlich klar und leitet dann nur noch elektrolytisch.

Die für beide Feldrichtungen gemessene Stromspannungskurve ist völlig unsymmetrisch, sie zeigt die für Gleichrichter typische Gestalt. Die Fig. 3 gibt ein Beispiel. Es ist mit *stationären* Strömen[1]) gemessen worden.

Gesetzt, Spannung und Temperatur seien so gewählt, daß ein Elektron einen mit Farbzentren erfüllten Kristall (wie in Fig. 1 oder 2) in etwa 10 Sekunden durchläuft: Dann beträgt trotzdem die *Einstellzeit* T_0 der

[1]) Die Krümmung der Stromspannungskurve in ihrem obersten Teil entsteht dadurch, daß sich die Konzentration der Farbzentren mit der Spannung ändert. Die Einstellung eines neuen stationären Wertes erfordert viele Minuten. Die Einzelheiten sollen hier nicht erörtert werden. — Verhindert man die Konzentrationsänderungen, so gilt das Ohmsche Gesetz: Strom und Spannung sind einander proportional.

stationären Ströme mehrere Minuten. So lange dauert es, bis ein mit Farbzentren erfüllter Kristall leer gelaufen ist. Noch viel länger dauert es, bis ein klarer sich praktisch homogen mit Farbzentren angefüllt hat. Die lange Einstellzeit T_0 beim Auslaufen der Elektronen ist leicht zu verstehen. Beim Auslaufen hat die Wolke der Farbzentren eine scharfe Hinterfront, Fig. 4. Das klare, nur elektrolytisch leitende Kristallstück nimmt als großer Widerstand den Hauptteil der Spannung auf. Infolgedessen herrscht im Bereich der Farbzentren nur eine kleine Feldstärke und die Elektronen wandern viel langsamer als bei homogener Feldverteilung.

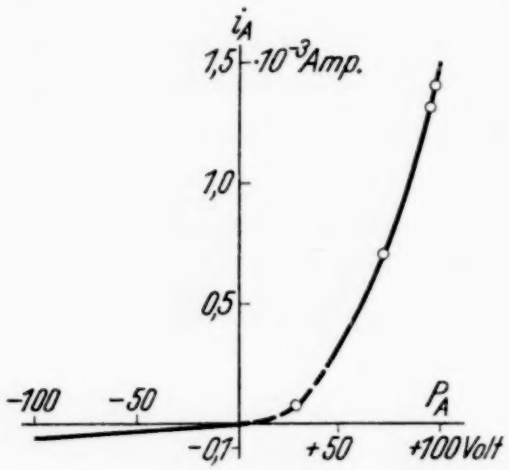


Fig. 3. Eine Stromspannungskurve zeigt die Gleichrichterwirkung der in Fig. 1 und 2 skizzierten Anordnungen.

Mit den Modellen der Fig. 1 und 2 kann man Wechselströme sehr kleiner Frequenz gleichrichten. Ihre Periode T muß größer sein als die Einstellzeit T_0. Bei Flußrichtung ist der ganze Kristall mit Farbzentren erfüllt, bei Sperrrichtung bildet der Kristall in seiner ganzen Länge eine *Sperrschicht*.

Während der Einstellzeit T_0 wird die Sperrschicht nur von einem *Teil* des Kristalles gebildet. Ihre Dicke x wächst beim Auslaufen der Elektronen

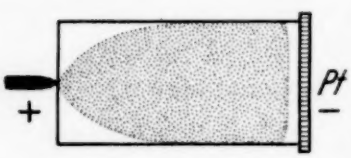


Fig. 4. In der Sperrichtung bildet sich vor der Kathode eine von Elektronenleitung freie Kristallschicht aus, d. h. eine Sperrschicht. Sie wächst mit zunehmender Sperrzeit. Die Skizze kann auch als Schema eines „geschichteten" Gleichrichtermodelles dienen. Dann bedeutet der punktierte Bereich einen praktisch nicht erschöpfbaren Halbleiter, z. B. einen K Br + K H-Mischkristall, das klare Stück reines K Br. Eine sich ausbildende Sperrschicht kann praktisch nicht dicker werden als dies reine K Br-Stück.

von Null bis zur ganzen Kristallänge l an. Da der Farbzentrenbereich eine scharfe Hinterfront hat (Fig. 4), läßt sich die Dicke x der Sperrschicht zur Zeit t berechnen. Es gilt

$$x\,l + \frac{\delta}{2}\,x^2 = P \cdot v_F \cdot t \qquad (1)$$

(v_F = Beweglichkeit der Farbzentren).

Bei der Herleitung[1]) ist vorausgesetzt, daß der Kristall zuvor eine homogene Farbzentrenverteilung hatte. Die Dicke der Sperrschicht wächst also anfänglich proportional zu t, später jedoch nur proportional zu $\sqrt{t}$.

[1]) Sie erfolgt im Anschluß an die von E. Mollwo u. W. Roos, Göttinger Nachr., Math.-phys. Kl. (N. F.) **1**, 107, 1934, gegebenen Gleichungen.

Grundsätzlich anders verläuft der Abbau einer einmal gebildeten Sperrschicht: Die Sperrschicht bildet sich nicht einfach durch Verringerung ihrer Dicke x zurück. Die Elektronen wandern nicht mit scharfer Vorderfront in den klaren Kristallteil hinein. Dieser wird vielmehr in seiner ganzen Länge allmählich mit Farbzentren aufgefüllt. Quantitativ werden wir das später in anderem Zusammenhang behandeln. — Der Unterschied beim Aus- und Einwandern der Elektronen, also bei der Entstehung und der Rückbildung der Sperrschicht ist eine einfache Folge der Feldverteilung.

Die jeweils vorhandene Sperrschicht enthält bei großen Werten von δ fast den ganzen Spannungsabfall. Infolgedessen kann schon eine dünne Schicht den Strom praktisch sperren. — Die Ausbildung der dünnen Sperrschicht erfolgt in Zeiten, die gemäß Gleichung (1) wesentlich kleiner sind als die gesamte Einstellzeit T_0.

Infolge der soeben aufgezählten Umstände gelingt es, mit der Modellanordnung trotz der großen Einstellzeit T_0 (mehrere Minuten!) einen Wechselstrom von 50 Perioden zu erheblichem Teile gleichzurichten. — Wir geben ein Zahlenbeispiel.

Ein Kristall war, wie aus Fig. 2 ersichtlich, zuvor mit Farbzentren angefüllt worden. Seine Temperatur betrug 280^0 C, der Wert von δ rund 1000. Bei 220 Volt Wechselspannung zeigte ein Wechselstrommesser 10^{-4} Amp., der mit ihm in Reihe geschaltete Gleichstrommesser $0{,}32 \cdot 10^{-4}$ Amp. Der Wechselstrom wurde also zu rund 30% gleichgerichtet. Die Sperrschicht erreicht bei diesem Versuch nur eine Dicke unter 10^{-1} mm. Das kann man aus Gleichung (1) abschätzen. Diese Sperrschicht ist nicht mehr sichtbar.

Man kann also den Vorteil einer geringen Dicke der Sperrschicht erreichen, ohne den Elektrodenabstand zu verringern. — Die Sperrschicht grenzt in diesem Falle auf ihrer einen Seite an einen Halbleiter, nämlich den Farbzentren enthaltenden Kristallteil.

Die Anordnung hat noch einen *Nachteil*: Der Halbleiter bestimmt keinen festen Höchstwert für die Dicke der Sperrschicht, seine Elektronen können bei langen Sperrzeiten herauswandern. Man vermeidet das durch Hinzunahme eines praktisch nicht erschöpfbaren Halbleiters. Damit kommt man zu einem *geschichteten* Aufbau des Modells: Man setzt nur unmittelbar vor die Sperrelektrode eine dünne Schicht aus reinem KBr. Sie soll die größte Dicke der Sperrschicht festlegen. Dann folgt der praktisch nicht erschöpfbare Halbleiter. Als Beispiel nennen wir den Mischkristall $KBr + 10^{-3}\,KH$. Die Konzentration seiner Farbzentren und damit der Elektronen wird nur durch das Dissoziationsgleichgewicht $KH \rightleftarrows K + H$

bestimmt[1]). Der KH-Zusatz stellt also in diesem KBr-Stück lediglich ein großes Elektronendepot dar. *Das geschichtete Modell entspricht am besten den technischen Trockengleichrichtern.* Davon wird im nächsten Paragraphen Gebrauch gemacht werden.

Zusammenfassend können wir an Hand des Modells sagen: Eine Sperrschicht ist ein Kristallstück zwischen den Elektroden eines Gleichrichters. Von der einen Seite können diesem Kristallstück Elektronen zugeführt werden, und zwar entweder aus einer elektronenliefernden Elektrode oder einem angrenzenden Halbleiter. An der anderen Seite des Kristalls muß eine Elektrode sitzen, die keine Elektronen an den Kristall abgeben kann („Sperrelektrode"). Die Sperrschicht hat die Aufgabe, in der Sperrichtung den überwiegenden Anteil des Spannungsabfalles aufzunehmen. *Die Dicke der Sperrschicht und ihre Eigenschaften* (z. B. Leitfähigkeit) *hängen weitgehend von den Betriebsbedingungen* (z. B. Feldstärke) *ab.* Das ist an den Modellen gut zu übersehen.

Zum Schluß noch eine Bemerkung: Wir haben uns der Kürze halber ausschließlich auf die Verhältnisse mit elektronischer Überschußleitung beschränkt. Die ganzen Ausführungen lassen sich auch auf Ersatzleitung übertragen, sowie auf andere Kristalle. Die nach Zahl und Geschwindigkeit überwiegenden Elektrizitätsträger brauchen keine Elektronen zu sein, der in Sperrichtung in der Sperrschicht fließende Strom braucht nicht elektrolytischer Natur zu sein.

4. Der Cu_2O*-Gleichrichter.* Unter den technisch durchentwickelten Trockengleichrichtern ist der Kupferoxydulgleichrichter in seiner Wirkungsweise am besten geklärt. Man verdankt das besonders den Arbeiten von Gudden[2]), Schottky[3]) und Waibel[4]). — Dieser Gleichrichter arbeitet mit Elektronen-Ersatzleitung[5]). Im übrigen entspricht er dem zuletzt beschriebenen Modell. Die Fig. 5 erinnert kurz an den Aufbau einer „Hinterwandzelle": Eine Kupferplatte Cu ist durch Einwirkung von O_2 oberflächlich oxydiert worden. Unmittelbar vor dem Kupfer sitzt eine reine Cu_2O-Schicht.

---

[1]) Abgesehen von dem Übergangsgebiet zwischen dem reinen KBr und dem Mischkristall sowie dem Grenzfall sehr hoher Feldstärken. Vgl. Phys. ZS. **108**, 55, 1937 und R. Hilsch, Ann. d. Phys. (5) **29**, 407, 1937. — [2]) B. Gudden, Erlanger Berichte **62**, 289, 1930. — [3]) Z. B. W. Schottky u. F. Waibel, Phys. ZS. **36**, 912, 1935. — [4]) F. Waibel, Wiss. Veröff. a. d. Siemenswerken **15**, 75, 1936. — [5]) Der Mechanismus der Elektronenersatzleitung ist zuerst für Kristalle mit lichtelektrischer Leitung beschrieben worden. B. Gudden u. R. W. Pohl, ZS. f. Phys. **21**, 1, § 2, 1924. In besonders anschaulicher Form zeigt ihn ein Versuch von E. Mollwo, Gött. Nachr., Math.-Phys. Kl. (N. F.). **1**, 215, 1935.

Dort ist der ganze eindringende Sauerstoff zur Oxydulbildung verbraucht worden. Die vorgelagerten Schichten hingegen enthalten noch überschüssigen Sauerstoff oder, anders ausgedrückt, CuO neben Cu_2O. Als zweite Elektrode ist ein beliebiges Metall *M* aufgepreßt. In Fig. 5 ist die Kupferelektrode negativ, der Strom wird durchgelassen. D. h. physikalisch: Die Oxydulschicht kann Elektronen in den Halbleiter nachrücken lassen und daher selbst aus dem Cu aufnehmen. Oder chemisch: An der Kupferplatte wird ankommendes CuO (dem thermischen Gleichgewicht bei Zimmertemperatur entsprechend) in Cu_2O zurückverwandelt.

Ist die Kupferplatte positiv, so sperrt der Gleichrichter. Physikalische Deutung: Die Oxydulsperrschicht kann keine Elektronen an das Kupfer abgeben und daher auch keinen Ersatz von seiten des Halbleiters aufnehmen. Die Oxydulschicht besitzt nur ihr sehr kleines u. E. elektrolytisches Leitvermögen und daher nimmt sie trotz ihrer geringen Dicke praktisch den ganzen Spannungsabfall auf. Chemische Deutung: Dem thermischen Gleichgewicht entsprechend nimmt die Kupferelektrode kein Cu aus dem Cu_2O auf, die isolierende Oxydulschicht wird nicht durch Bildung von CuO in einen Halbleiter verwandelt. — Die auf dem stark sauerstoffhaltigen Cu_2O aufliegende Elektrode *M* zeigt keine Sperreigenschaften. Sie entspricht in unserem Modell der nachliefernden Elektrode. Demnach steht die wohl allgemein anerkannte Deutung des Kupferoxydulgleichrichters mit unserem Modell, am besten dem geschichteten, in Übereinstimmung.

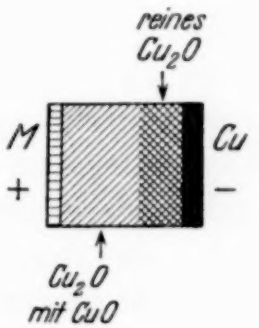


Fig. 5.
Schema eines Kupferoxydulgleichrichters in technischer „Hinterwand"-Ausführung.

Bei dieser Beschreibung des Cu_2O-Gleichrichters ist wieder, wie bei unserem Modellgleichrichter der entscheidende Einfluß der *Elektrodeneigenschaften* betont. Auch hier hat die Sperrschicht selbst keine konstanten Eigenschaften. Insbesondere hat sie einen von der Feldstärke abhängigen Widerstand, ihre Ausdehnung ändert sich usw. Das ist nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten verständlich.

So kann man z. B. die Befunde Waibels an einer 0,3 mm dicken, in besonderer Form aufgebauten „Makrosperrschicht" aus Cu_2O erklären. Waibel hat diese Schicht von der einen Seite her allmählich abgetragen und das Verhalten der jeweils verbleibenden „Restschicht" untersucht. Er fand dabei ihren Widerstand abhängig von der Feldstärke und eine Umkehr der „Sperrichtung" (Waibel sagt „Unipolarität der Restschicht") bei einer gewissen mittleren Schichtdicke. — Zur Erklärung eignet sich unser geschichtetes Modell, falls man dem KH im KBr eine exponentielle Verteilung gibt.

5. Ein KBr-*Kristall mit Steuergitter.* Der KBr-Kristall mit nur *einer* elektronenliefernden Elektrode, also das Modell einer Sperrschicht, entspricht einem Zweielektroden-Vakuumrohr mit einer glühenden Elektrode. Das Vakuumrohr wird durch Einbau einer dritten Elektrode, kurz Gitter genannt, zum Steuerorgan.

In entsprechender Weise haben wir in das KBr-Sperrschichtmodell ein Steuergitter eingeschaltet und es dadurch in ein Steuerorgan verwandelt. Das Gitter bestand aus einem Platindraht von 0,2 mm Dicke etwa 2 mm vor der Kathode. Der Draht war in den Kristall eingeschmolzen. Das Verfahren haben wir schon vor Jahren veröffentlicht[1]): Ein elektrisch geheizter Platindraht dringt genau so in KBr-Kristalle ein, wie ein warmer Kupferdraht in einen Eisklotz. Der Einkristall bleibt dabei erhalten.

Die Schaltung dieses Dreielektrodenkristalles ist aus Fig. 6 ersichtlich. Gemessen wurde der Anodenstrom i_A und der Gitterstrom i_G in Abhängigkeit von der Gitterspannung P_G. Diese Messungen wurden bei zwei verschiedenen Anodenspannungen ausgeführt, nämlich $P_A = 100$ Volt und $= 150$ Volt. Die Messungen sind in Fig. 7 und 8 graphisch dargestellt. Die Kurven gleichen durchaus den bekannten Kennlinien eines Dreielektrodenrohres. Man beschreibt die Ergebnisse am besten mit den für Elektronenröhren entwickelten Begriffen.

Zur Steuerung ist eine Gittervorspannung von etwa $+10$ Volt erforderlich. Die obere Kennlinie besitzt eine *Steilheit*

$$S = \left(\frac{\partial i_A}{\partial P_G}\right)_{P_A = 150 \text{ Volt}} = 0{,}028 \text{ Milliampere/Volt.}$$

Beide Kennlinien zusammen ergeben als *Durchgriff*

$$D = \left(\frac{\partial P_G}{\partial P_A}\right)_{i_A = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Ampere}} = 7{,}3\ \%$$

und den *inneren Widerstand*

$$R_i = \left(\frac{\partial P_A}{\partial i_A}\right)_{P_G = 10 \text{ Volt}} = 4{,}6 \cdot 10^5 \text{ Ohm,}$$

$S \cdot D \cdot R_i$ ergibt 0,95 statt 1.

Dieser als Beispiel gewählte Dreielektrodenkristall steuert einen Strom von 0,4 Milliampere mit einen Gitterstrom von 0,02 Milliampere. Man hat also hier eine 20fache Verstärkung. Das ist keineswegs eine obere Grenze. Wir haben auch Verstärkungen über 100fach hergestellt. Dazu braucht man höhere Werte von δ. Doch wird bei diesen Verstärkungen

[1]) Naturwissensch. **20**, 932, 1932.

die Trägheit selbst für einen Modellversuch zu groß, wenn man nicht den Elektrodenabstand verkleinern will.

Wir haben mit den Versuchen keinerlei technische Ziele verfolgt, uns interessierte nur die grundsätzliche Seite der Frage. Für den Steuervorgang sind die Einzelheiten der Elektronenbewegung ohne Belang. Die langsame

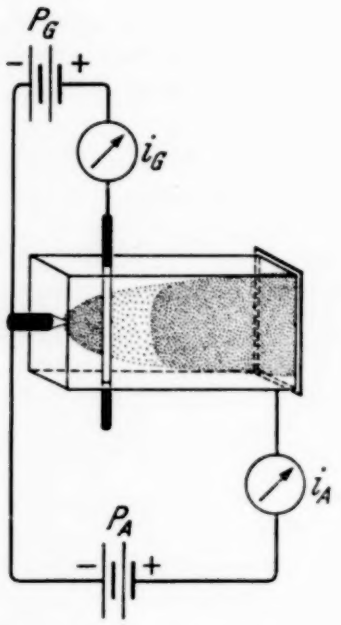


Fig. 6. Schema und Schaltung eines Dreielektrodenkristalles. Gezeichnet ist die durch Farbzentren sichtbar gemachte Elektronenverteilung während einer Abnahme des Anodenstromes. Die negative Aufladung des Gitters ist vergrößert worden, der Anodenstrom hat aber noch nicht seinen stationären Wert erreicht. (Kristallabmessungen $2 \times 5 \times 10$ mm).

Fig. 7.

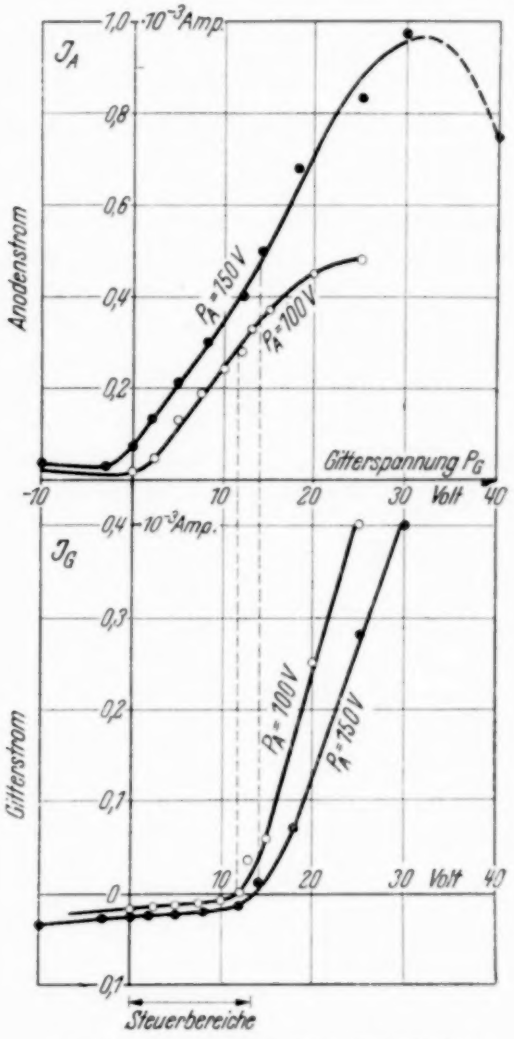


Fig. 8.

Fig. 7 und 8. Die beiden Kennlinien eines Dreielektrodenkristalles mit 20facher Verstärkung. $T = 490^0$ C.

Diffusion der Elektronen im Kristall wirkt nicht anders als ihre beschleunigte Bewegung im Hochvakuum. Wesentlich ist nur, daß die Elektronen den überwiegenden Anteil des Stromes tragen und (wenigstens überwiegend) nur der einen Elektrode entstammen.

Die Trägheit der Ströme in einem langen Dreielektrodenkristall ist für Schauversuche ein Vorteil. Sie gibt die Möglichkeit, den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen sowohl mit dem Strommesser wie mit dem Auge

bequem zu verfolgen. So sieht man beispielsweise bei einer Verminderung der Gitterspannung den größten Teil der Elektronenwolke zwischen Gitter und Anode verschwinden. Das ist in Fig. 6 skizziert.

Für technische Zwecke wird man stets Steuerorgane geringer Trägheit erstreben. Dann muß man von einem Modell mit dünner Sperrschicht ausgehen und das Gitter in die Sperrschicht selbst verlegen, nicht in den vorgelagerten leitenden Teil (also nicht in das Gebiet der Farbzentren bzw. des O-Überschusses im Cu_2O). Sicher ist der Einbau einer Steuerelektrode in eine dünne Sperrschicht experimentell nicht so einfach wie bei einer dicken. —

Die erzielbare Verstärkung wird auch hier um so größer ausfallen, je größer δ, also der Elektronenanteil des Stromes, gewählt wird.

6. Zusammenfassung. Die Arbeit beschreibt ein aus KBr bestehendes Modell einer Sperrschicht. Durch Einbau eines Steuergitters in die Sperrschicht wird ein Dreielektrodenkristall hergestellt. Er entspricht einem Dreielektrodenrohr. Seine Kennlinien für Anoden- und Gitterstrom finden sich in den Fig. 7 und 8. Sie beziehen sich auf ein Beispiel mit 20facher Verstärkung.

Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität, Oktober 1938

Der Übergang des amorphen Metalls in den kristallinen Zustand.

Von **J. Kramer**, Ankara.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 29. Oktober 1938.)

Im Anschluß an frühere Arbeiten wird gezeigt, daß sich die amorphe Metallmodifikation auffassen läßt als ein hochkomprimiertes Gas, bei dem durch die Wechselwirkung der Nachbaratome die Ionisierungsenergie um einige Größenordnungen verkleinert ist. Diese Grundannahme über den Aufbau der amorphen Metallmodifikation wird nicht nur durch das Verhalten der amorphen Schichten, sondern auch durch Experimente auf anderen Gebieten bestätigt. Direkt gezeigt wird zudem der Einfluß der gegenseitigen Atomabstände auf die Höhe der Ionisierungstemperatur durch die Verschiebung der Umwandlungstemperatur durch allseitigen Druck. — Die Umwandlung einer amorphen Metallschicht durch den Stoß beschleunigter Elektronen entspricht vollkommen der Ionisierung der Atome im Gas durch Elektronenstoß. Die Versuche, die Struktur dünner Metallschichten durch Elektronenbeugung zu bestimmen, sind nur unter günstigen Umständen einwandfrei; die Bedenken, die im Anschluß an solche Versuche über die Existenz der amorphen Metallmodifikation aufgekommen sind, haben deswegen keine Berechtigung. — Die Verwandtschaft zwischen der amorphen Modifikation und dem dampfförmigen Zustand wird besonders dadurch gezeigt, daß auch bei amorphen Schichten Vorgänge beobachtet werden können, die dem Zeeman-Effekt und dem Stark-Effekt entsprechen: Durch ein Magnetfeld wird die Umwandlungstemperatur verschoben, und die Größe der Verschiebung wird durch die Formel für die Aufspaltung der Spektrallinien beim normalen Zeeman-Effekt wiedergegeben. Als Stark-Effekt im amorphen Metall kann die von Perucca gefundene Widerstandsabnahme dünner Metallschichten im elektrostatischen Feld gedeutet werden.

Einleitung. In den Arbeiten (I)[1]) und (II)[2]) ist über die amorphe Modifikation, in die prinzipiell jedes Metall übergeführt werden kann, gesprochen worden, und es ist dargelegt worden, daß das amorphe Metall bei einer bestimmten Temperatur, die für das betreffende Metall bei genügender Dicke der Schicht als Materialkonstante anzusehen ist, in den kristallinen Zustand übergeht, was am besten an der dann sprunghaft einsetzenden Leitfähigkeit wahrzunehmen ist. In (III)[3]) sind die Besonderheiten für sehr dünne Schichten besprochen, die sich aus den Eigenschaften der amorphen Modifikation an sich, also in genügend großen Probestücken ableiten. Es sei hier nochmal darauf hingewiesen, daß nicht jede beliebige

[1]) J. Kramer, Ann. d. Phys. (5) **19**, 37, 1934. — [2]) J. Kramer, ZS. f. Phys. **106**, 675, 1937. — [3]) J. Kramer, ebenda, S. 692.

Metallschicht unabhängig von der Herstellungsart amorph ist und den charakteristischen Leitfähigkeitssprung zeigt, auch wenn die Temperatur der Schicht bei der Herstellung die Umwandlungstemperatur nicht überschritten hat. Die Energiebeträge, die eine amorphe Schicht in den kristallinen Zustand überführen können, sind so klein, daß es sehr schwer ist, diese bei der Herstellung von ihr fernzuhalten. Da zudem der Übergang vom amorphen zum kristallinen Zustand ein exothermer Vorgang ist, ist eine Überschreitung dieses Energiebetrages um so verhängnisvoller. Es ist also tatsächlich kein Beweis für die Unrichtigkeit der Behauptungen in den Arbeiten (I) bis (III), wenn Schichten, die womöglich noch durch die zwar sehr bequeme, aber für diesen Zweck besonders ungeeignete thermische Verdampfung gewonnen sind, keinen scharfen Leitfähigkeitssprung innerhalb eines kleinen Temperaturbereiches zeigen. Die Eigenschaften einer Mischung von amorphen mit kristallinen Anteilen sind sehr verschieden von denen des reinen amorphen Metalls. Wohl zeigen solche Schichten eine irreversible Leitfähigkeitszunahme beim Erwärmen, aber von einer bestimmten Umwandlungstemperatur kann nicht gesprochen werden. Für Kohle zeigt das sehr deutlich ein Vergleich der Fig. 1 mit 2 der Arbeit von Çelebi[1]). Nur teilweise amorphe Schichten aus echten Metallen verhalten sich genau so. Wie scharf zum Beispiel der Umwandlungspunkt für Antimon festgelegt werden kann, zeigen die Kurven der Fig. 1 dieser Arbeit. Die Schichten, die ohne Magnetfeld umgewandelt sind, zeigen innerhalb *eines* Temperaturgrades eine Richtungsänderung der Leitfähigkeitskurve von über 70°. Im Magnetfeld ist die Richtungsänderung noch wesentlich steiler. Dabei bedeutet *ein* Temperaturgrad nur 0,6% der Temperatursteigerung von Zimmertemperatur auf den Umwandlungspunkt. Die Schichten sind in 9 Stunden mit einer Stromstärke von einem Milliampere bei einer Spannung von 2000 bis 2700 Volt durch Kathodenzerstäubung hergestellt, also ohne weitgehende Vorsichtsmaßregeln. Sehr viel leichter, besonders bei anderen Metallen, ist es allerdings, abgerundete Kurven zu bekommen; aber solche abgerundete Kurven als Beweis gegen die Existenz der scharfen Kurve, also gegen die Existenz der amorphen Metallmodifikation, anzuführen, ist nicht gerechtfertigt, ebenso wenig wie man diesen Schluß aus der Fig. 1 der Arbeit von Çelebi ziehen kann, wie es die Fig. 2 der Arbeit sehr deutlich zeigt. Es hat sogar wenig Wert, die Abhängigkeit der Leitfähigkeit solcher halbamorpher Schichten von der Temperatur wiederzugeben, da eine definierte Abhängigkeit nicht besteht. Denn abgesehen

[1]) Münif Çelebi, ZS. f. Phys. **106**, 702, 1937.

davon, daß kleine Veränderungen in den Herstellungsbedingungen die Leitfähigkeit an sich und die Form der Kurve sehr stark verändern können, ist die Form der Kurve auch noch von der Erwärmungsgeschwindigkeit abhängig. Damit hängt eine typische Erscheinung der halbamorphen Schichten zusammen, nämlich das Altern; solche Schichten verbessern ihre Leitfähigkeit beim einfachen Liegenlassen. Wirklich amorphe Schichten sind stabil. Es gibt eine ganz bestimmte Zusammensetzung aus amorphem und kristallinem Metall, bei der die Instabilität besonders groß ist. In diesem Bereich haben die Schichten besondere Eigenschaften. Es kann bei ihnen ein zu großer Stromstoß Leitfähigkeitsänderungen von 100% hervorrufen. Der Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit ist besonders groß und wie in allen amorphen oder teilweise amorphen Schichten anormal. Um solche Schichten wird es sich auch handeln, wenn die Leitfähigkeit durch Belichten verändert werden kann. Das amorphe Selen, das ja nicht verschieden vom amorphen Zustand der anderen Metalle sein soll, hat diese Eigenschaft auch nur bei einer bestimmten Mischung mit kristallinem Metall[1]). Photowiderstände dürften wohl, wenn auch unter sehr verschiedenen Bedingungen, mit allen Metallen herstellbar sein.

So interessant und wichtig also das Arbeiten mit solchen halbamorphen Schichten sein kann, so ist es doch nicht angebracht, aus dem Verlauf der Leitfähigkeit *einzelner* Schichten ohne Rücksicht auf die Herstellungsbedingungen und den Zustand der Schicht Schlüsse auf die Existenz oder Nichtexistenz der amorphen Modifikation zu ziehen, wie dies in letzter Zeit mehrfach geschehen ist. Im Rahmen des Ganzen gesehen, spricht das Verhalten solcher Schichten ebenso sehr für die Realität des amorphen Zustandes wie das Verhalten des vollkommen amorphen Metalls.

Trotz der großen experimentellen Schwierigkeiten bei der Herstellung der amorphen Metallmodifikation und der Festlegung der Umwandlungstemperatur, die bei einigen Metallen in hinreichendem Maße überwunden werden können, soll in der vorliegenden Arbeit die Umwandlung der amorphen Modifikation in das kristalline Metall einer näheren Untersuchung mit einigen neuen Experimenten unterzogen werden, um über den Mechanismus der Umwandlung ein möglichst anschauliches Bild zu gewinnen. Dabei wird nicht nur, wie bisher, die Umwandlung durch Temperaturerhöhung, sondern auch durch andere Energieformen in Betracht gezogen, ferner wird der Einfluß von äußeren Bedingungen, wie Druck und Magnetfeld,

[1]) B. Lange, Die Photoelemente und ihre Anwendung. Teil 1, S. 15. Leipzig 1936.

auf die Höhe der Umwandlungstemperatur herangezogen. Es sei vorausgeschickt, daß durch diese Untersuchungen die bisher ausgesprochenen Annahmen über den Aufbau und die Umwandlung der amorphen Modifikation bestätigt werden. Allerdings muß betont werden, daß die bisherigen Messungen teilweise nur einen orientierenden Charakter besitzen und daß Materialkonstanten aus ihnen noch nicht gewonnen werden konnten. Dies liegt großenteils in der Natur dieser Untersuchungen, die durch die schon erwähnte Schwierigkeit der Herstellung der amorphen Modifikation stark beeinflußt werden, teilweise aber auch an äußeren Umständen, die es mit sich brachten, daß unter ungünstigen Versuchsbedingungen — Mangel geeigneter Versuchsräume, mancher experimenteller Hilfsmittel und geschulter Hilfskräfte — gearbeitet werden mußte. Immerhin lassen schon die im nachstehenden mitgeteilten bisherigen Ergebnisse die Wiederholung und Erweiterung derselben unter günstigeren Versuchsbedingungen als eine durchaus lohnende Aufgabe erkennen.

Die Ionisierung des Metallatoms in der amorphen Modifikation. Schon in den vorangehenden Arbeiten ist gelegentlich darauf hingewiesen worden, daß man die amorphe Metallmodifikation als ein hochkomprimiertes Gas ansehen kann. Es war dort dieses Bild nur zur Veranschaulichung des amorphen Zustandes gedacht. Die Ergebnisse bei der Umwandlung des amorphen Metalls lassen sich aber am besten und am einfachsten dann deuten, wenn man die amorphe Modifikation wirklich als ein Gas ansieht. Trotz des festen Zustandes finden sich viele charakteristische Eigenschaften der Gase bei der amorphen Metallmodifikation wieder. Alle in dieser Arbeit beschriebenen Versuche sind nur die Übertragung entsprechender Untersuchungen an wirklichen Gasen auf die amorphe Modifikation. Auch die Umwandlung einer amorphen Schicht in das kristalline Metall wird eingeleitet durch die Ionisierung der Atome, die von der Ionisierung im Gas nicht wesentlich verschieden ist. Die sich an die Ionisierung anschließende Kristallisation ist ein sekundärer Vorgang, der allerdings äußerlich mehr in die Augen springt und der zudem die Ionisierung und damit den Übergang zum kristallinen Metall irreversibel macht.

Der grundlegende Unterschied zwischen dem gewöhnlichen und dem hochkomprimierten Gas der amorphen Modifikation besteht darin, daß die Ionisierungsenergie im Gas in der Größenordnung von 10 e-Volt liegt, während sie im amorphen Metall nur einige Hundertstel betragen kann. Durch diesen großen Unterschied kommt eine so bedeutende quantitative Veränderung in den Ergebnissen solcher Versuche zustande, die einmal im wirklichen Gas, das andere Mal im hochkomprimierten Gas der amorphen

Metallmodifikation gemacht werden, daß es oft auf den ersten Blick nicht mehr ersichtlich ist, daß beide Vorgänge qualitativ gleich sind.

Die Verkleinerung der Ionisierungsenergie im amorphen Metall gegenüber der im gewöhnlichen Gas wird durch die Wechselwirkung der Nachbaratome bewirkt. Diese Annahme wird durch alle Versuche an amorphen Schichten bestätigt. Zunächst kann dadurch die Umwandlung des amorphen Metalls einfach erklärt werden; dann spricht das abweichende Verhalten dünnster Schichten[1]) für deren Richtigkeit. Die Verschiebung der Umwandlungstemperatur durch allseitigen Druck, wie sie in dieser Arbeit beschrieben wird, kann sogar als experimentelle Bestätigung angesehen werden; und ebenfalls das Verhalten des amorphen Metalls einem magnetischen und elektrischen Feld gegenüber, wie es weiter unten beschrieben wird, zeigt, daß kein Unterschied in der Ionisierung des Metallatoms im wirklichen Gas und im amorphen Metall besteht. Aber diese Annahme wäre doch nur als eine Annahme ad hoc anzusehen, wenn sie nicht auch auf anderen scheinbar fernliegenden Gebieten bestätigt würde. So findet man bei der Ionisierung durch bewegte Ionen, „daß die Elektronenbefreiung schon bei sehr viel niedrigeren Ionengeschwindigkeiten einsetzt, als nach der einfachen stoßmechanischen Erwartung gefolgert wird, und daß die Ionisierungsspannung in komplizierter Weise von der Konstitution des stoßenden Ions und des gestoßenen Atoms abhängt. Die Ionisierung durch den Stoß eines Ions oder, allgemeiner, durch den Stoß eines Atoms läßt sich nur dann verstehen, wenn man berücksichtigt, daß bei starker Annäherung der Stoßpartner die Wechselwirkung zwischen ihren Elektronensystemen Störgebiete verursacht[2])." „Sehr wichtig ist nun der experimentelle Befund, daß die Ionisation durch neutrale Atome schon bei bedeutend kleineren Geschwindigkeiten beginnt, als es bei den entsprechenden Ionen der Fall ist[3])." Wenn schon bei diesen Stoßversuchen, bei denen die Zahl der Partner im allgemeinen nicht größer als zwei ist, eine so starke Verkleinerung der Ionisierungsenergie beobachtet wird, wie viel mehr dann bei der amorphen Metallmodifikation, bei der die Wechselwirkung wegen der größeren Zahl der sich beeinflussenden Atome viel größer ist. Dazu kommt, daß die Wechselwirkung zwischen Atomen mit gleicher oder ähnlicher äußerer Elektronenanordnung, also besonders zwischen *einer* Atomsorte, größer ist als zwischen Atomen mit großem gegenseitigen Abstand im Periodischen System. Damit wird zusammenhängen, daß bei Versuchen

[1]) Siehe die Arbeit (III). — [2]) O. Klemperer, Einführung in die Elektronik, S. 170. Berlin, 1933. — [3]) O. Klemperer, l. c. S. 173.

über die Linienbreite der Spektrallinien „Vermehrung des Metalldampfdruckes selbst eine wesentlich stärkere Verbreiterung hervorruft als der Zusatz fremder Gase“[1])[2]).

Die Grundannahme über den Aufbau und die Umwandlung der amorphen Metallmodifikation, die Verkleinerung der Ionisierungsenergie durch die Wechselwirkung der Nachbaratome, wird also nicht nur durch die Ergebnisse der Versuche an der amorphen Modifikation, sondern ebenso deutlich auch durch die Ionisierungsversuche beim Stoß mit Ionen und Atomen plausibel gemacht. Einen direkten experimentellen Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme kann man aber bei der amorphen Modifikation noch dadurch erbringen, daß man die Wechselwirkung verändert und die dadurch bedingte Verschiebung der Umwandlungstemperatur feststellt. Die Größe der Wechselwirkung und damit die Höhe der Umwandlungstemperatur wird bei einer Atomsorte durch die Zahl und die Entfernung der sich beeinflussenden Atome bestimmt. Je kleiner die Zahl, desto höher die Wechselwirkung, wie es sich in der höheren Umwandlungstemperatur dünnster Schichten äußert[3]). Je kleiner die gegenseitige Entfernung der Atome, desto tiefer liegt die Umwandlungstemperatur. Eine Verkleinerung der Atomabstände durch allseitigen Druck muß demnach die Umwandlungstemperatur nach kleineren Werten verschieben. Diese Forderung wird durch die Versuche bestätigt. Es ist möglich, den Umwandlungspunkt solcher Metalle, deren Umwandlungstemperatur oberhalb der Zimmertemperatur liegt, allein durch Druck bis auf Zimmertemperatur zu erniedrigen, so daß die Umwandlung ohne Temperaturerhöhung erfolgt. Die Schichten wurden in Öl dem Druck ausgesetzt, was den Nachteil mit sich brachte, daß die Schichten leicht verdarben. Außerdem konnte mit der vorhandenen Presse der zur Umwandlung erforderliche Druck nur für einige Minuten gehalten werden, da sie für niedrigere Drucke konstruiert war. Trotzdem konnten sowohl bei Antimon als auch bei Blei, bei denen diese Versuche angestellt wurden, dauernde Leitfähigkeitsverbesserungen bis zum Faktor 20 erhalten werden. Bei Antimon genügte für die Um-

---

[1]) Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys., Bd. II, Teil 2, II, S. 2287, 11. Aufl. — [2]) Man wird hier an die Regel von Norbury erinnert, wonach die atomare Widerstandserhöhung bei verdünnten Mischkristallegierungen um so größer ist, je größer der Abstand der Gruppe des Zusatzmetalls von der des Grundmetalls im periodischen System ist (Handb. d. Metallphys. Bd. 1, S. 335, Leipzig 1935). Die Leitfähigkeit des Metalls wird nach einer in (I) angegebenen empirischen Formel durch die Höhe der Umwandlungstemperatur, also durch die Größe der Wechselwirkung, mitbestimmt. Es scheint also, daß auch noch für Legierungen entsprechende Zusammenhänge bestehen. — [3]) Siehe die Arbeit (III).

wandlung ein Druck von 2000 Atm., bei Blei war entsprechend der höheren Umwandlungstemperatur ein höherer Druck erforderlich. Für weitere Messungen, vor allem für die Feststellung des Zusammenhanges von Umwandlungsdruck und Umwandlungstemperatur, reichte die vorhandene Apparatur nicht aus. Die Ergebnisse zeigen aber, daß bei verkleinerten Atomabständen die Wechselwirkung größer und damit die Umwandlungstemperatur kleiner wird.

Die Ionisierung der Atome im amorphen Metall durch Elektronenstoß. In meinen bisher veröffentlichten Arbeiten ist nur die Ionisierung der Atome im amorphen Metall durch thermische Energie besprochen worden. Wenn diese Ionisierung der des Atoms im Gas entsprechen soll, muß sie auch durch andere Energieformen möglich sein. Im Gas spielt die Ionisierung durch Elektronenstoß eine größere Rolle im Experiment als die durch thermische Energie. Auch bei der amorphen Metallmodifikation muß die Ionisierung und damit die Umwandlung durch Elektronenstoß möglich sein. Ihr kommt auch im amorphen Metall eine gewisse Bedeutung zu, da oft versucht worden ist, durch Elektronenbeugung über den Aufbau dünner Metallschichten Auskunft zu erhalten. Diese Experimente haben mit wenigen Ausnahmen die Frage dahin beantwortet, daß ein amorpher Zustand der Metalle nicht existiert; und letzten Endes gehen alle Einwände gegen die vorangehenden Arbeiten auf diesen Punkt zurück. Dieses Ergebnis ist durchaus verständlich; denn fast immer werden die Schichten ohne jede Berücksichtigung der Herstellungsbedingungen untersucht. Gewöhnlich sind sie sogar durch thermische Verdampfung hergestellt, bei der der kristalline Anteil in den Schichten gewöhnlich so groß ist, daß Interferenzen entstehen müssen. Oft wird es für ausreichend erachtet, die Auffangfläche mit flüssiger Luft zu kühlen. Es wird dabei aber nicht beachtet, daß die Energie der auf die Schicht auftreffenden Atome selbst fünf- oder zehnmal größer ist als die Ionisierungsenergie. Wenn zudem noch die Schicht auf ein dünnes Häutchen niedergeschlagen wird, ist der Nutzen der Kühlung weiter in Frage gestellt.

Aber angenommen, es sei trotz der ungünstigen Herstellungsbedingungen und trotz aller Schwierigkeiten einmal gelungen, eine amorphe Schicht herzustellen. Auch in diesem Falle wird trotzdem die Untersuchung mit Elektronenstrahlen gewöhnlich kristallinen Aufbau der Schicht angeben. Denn die Ionisierungsenergie beträgt für die Atome im amorphen Metall einige Hundertstel e-Volt, wogegen die Geschwindigkeit der Elektronen bei der Elektronenbeugung gewöhnlich höher als 10000 Volt ist. Danach scheint jeder Versuch, die Struktur dünner Metallschichten durch Elek-

tronenbeugung zu bestimmen, aussichtslos, da die Geschwindigkeit der Elektronen auf keinen Fall genügend klein gemacht werden kann. Aber die Geschwindigkeit der Elektronen ist nicht allein maßgebend für die Umwandlung der amorphen Schicht. Denn die Atome können nur dann in den kristallinen Zustand übergehen, wenn die Zahl der ionisierten Atome in einem Bereich genügend groß ist. Es spielt also die momentane Energiedichte im Elektronenstrahl eine Rolle, so daß der Nachweis des amorphen Aufbaus einer Schicht auch mit schnellen Elektronen möglich erscheint.

Um diese Frage zu entscheiden, wurden Versuche angestellt, die Umwandlung der amorphen Modifikation nur durch Beschießen mit Elektronenstrahlen zu erreichen. Die Elektronen wurden durch eine Glühkathode erzeugt und die angelegte Wechselspannung von 10 bis 13000 Volt nur durch diese Glühkathode gleichgerichtet. Die Blende, durch die der Elektronenstrahl auf die Schicht geschickt wurde, konnte magnetisch geöffnet und geschlossen werden. Die Schichten waren entweder auf Glas oder auf ein Zaponlackhäutchen, das auf einer durchbohrten Glasplatte ausgespannt war, niedergeschlagen. In beiden Fällen wurde eine dauernde Leitfähigkeitsverbesserung gefunden, wenn eine Elektronenmenge von etwa $6 \cdot 10^{-6}$ Ampere-Sekunden pro Quadratmillimeter auf die Schicht geschickt wurde, wobei erwähnt werden muß, daß sich diese Elektronenmenge auf wenigstens 3 Sekunden verteilte, da die Belichtungszeit nicht kürzer gewählt werden konnte. Auf die bei den Strukturaufnahmen üblichen Blenden umgerechnet, ist daher auf jeden Fall eine Umwandlung zu befürchten, wenn die Aufnahme mit einer größeren Elektronenmenge als etwa $5 \cdot 10^{-8}$ Ampere-Sekunden gemacht wird und die Belichtungszeit 3 Sekunden oder weniger beträgt. Es erscheint nicht ausgeschlossen, mit dieser Elektronenmenge eine Aufnahme zu machen, aber nach den Angaben in „Einführung in die Elektronik" von Klemperer[1]) scheint man mehr zu gebrauchen. Dabei bedeutet diese Zahl nur die obere Grenze, die bei der Aufnahme sicher zur Umwandlung führt. Denn wenn es besonders auf die momentane Energiedichte ankommt, ist eine Aufnahme mit kleinerer Belichtungszeit — und im allgemeinen sind die Belichtungszeiten bedeutend kürzer — noch bedenklicher. Besonders kann die Elektronenbeugung empfindlicher auf eine Umwandlung vom amorphen in den kristallinen Zustand sein als die Leitfähigkeitsänderung. Denn eine kleine umgewandelte Partie in einer sonst amorphen Schicht kann kaum einen Einfluß auf die Leitfähigkeit ausüben, aber das Beugungsbild kann einen kristallinen

[1]) O. Klemperer, l. c. S. 10 und 239.

Aufbau der Schicht anzeigen. Es kann also nicht einmal geschlossen werden, daß bei Aufnahmen mit einer kleineren als der oben angegebenen Elektronenmenge die Gefahr der Umwandlung nicht bestanden habe.

Wenn also diese Versuche für die Strukturuntersuchungen mit Elektronenstrahlen an amorphen Schichten auch nur eine obere Grenze für die Elektronenmenge angeben, die nicht überschritten werden darf, wenn das Resultat nicht durch die Aufnahme selbst verfälscht werden soll, so haben sie doch das für unsere Auffassung vom Aufbau der amorphen Metallmodifikation wertvolle Resultat ergeben, daß eine Ionisierung der Atome im amorphen Metall ebenso möglich ist wie im Gas, wenn die Ionisierungsenergie durch den Stoß bewegter Elektronen übertragen wird. Die Umwandlung durch Elektronenstoß unterscheidet sich in nichts von der durch Erwärmen der Schicht. So konnte durch häufigeres Beschießen der normale Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit gewonnen werden, so daß also die Umwandlung sehr weit fortgeschritten sein muß. Das Auftreten des Metallglanzes bei der Umwandlung konnte bei diesen Versuchen sogar besser beobachtet werden als bei Schichten, die durch Erwärmen umgewandelt sind. Denn das kristalline und das amorphe Metall kann hier in einer Schicht nebeneinander verglichen werden. Durch den besseren Metallglanz der umgewandelten Stellen war die Blende scharf auf der Schicht abgebildet. Auch durch den für die Umwandlung charakteristischen Farbumschlag in der Durchsicht zeichnete sich die belichtete Stelle von der unbelichteten ab.

Die Ionisierung der Atome in der amorphen Metallmodifikation durch von außen auf die Schicht geschossene Elektronen hat eine vollkommene Parallele im Gas, bei der man etwa nach dieser Methode Anregungs- oder Ionisierungsspannungen bestimmt. Aber man kann in beiden Fällen die Ionisierung noch auf eine zweite Weise herbeiführen, nämlich dadurch, daß die im Gas oder im amorphen Metall vorhandenen Elektronen durch ein elektrisches Feld so beschleunigt werden, daß sie durch die auf der freien Weglänge erhaltene Beschleunigung ionisierend wirken können; im Gas führt das zu einem Funkenüberschlag. Lädt man einen Kondensator, der durch amorphe Kohle überbrückt ist, langsam auf, so fällt bei einer bestimmten Spannung seine Ladung auf Null ab, genau wie bei einem anderen Kondensator bei einem Funkenüberschlag. Daß der Vorgang sich in der Kohle und nicht in der Luft abspielt, geht daraus hervor, daß die Entladung bei derselben Spannung vor sich geht, gleichgültig, ob sich die Kohle in Luft oder im Hochvakuum befindet. Diese Versuche beleuchten aber deutlich den Unterschied, der bei der Ionisierung im amorphen Metall gegenüber dem Funkenüberschlag im Gas dadurch entsteht, daß bei ge-

nügender Zahl der ionisierten Atome durch die dann einsetzende Kristallisation die Ionisierung in der Kohle irreversibel wird. Bei kleiner Stromstärke bei der Entladung kann die Aufladung wiederholt werden, die zeitweilige Ionisierung der Kohle hinterläßt keine Folgen. Wird aber die Stromstärke nur wenig gesteigert, so läßt sich der Kondensator nicht mehr aufladen, da er durch eine Strombahn in der Kohle kurzgeschlossen ist. Durch die sich der Ionisierung anschließende Kristallisation ist die Strombahn fixiert worden. Wird die Ionisierungsspannung aus der Umwandlungstemperatur berechnet, so kann man aus dieser und der Feldstärke beim Stromübergang auf die freie Weglänge der Elektronen in der amorphen Kohle schließen, was zu vernünftigen Werten führt[1]).

Gerade diese Versuche zeigen durch das plötzliche, vollkommen reproduzierbare Einsetzen des Effekts, daß es sich wirklich um eine reine Ionisierung durch Elektronenstoß ohne Umweg über die Wärme handelt. Bei der Ionisierung durch die von außen auf die Schicht geschickten Elektronen ist dieser Einwand nicht so sicher von der Hand zu weisen. Aber aus dem Umstand, daß sich Schichten auf Glas und auf dünnen Zaponlackhäutchen gleichartig verhalten, ist anzunehmen, daß die Ionisierung nicht durch Wärme erfolgt ist. Zudem zeigte ein am Glas anliegendes Thermoelement bei der Beschießung nur eine Temperatursteigerung von 10^0, obwohl in diesem Falle die ganze Energie des Elektronenstrahles in Wärme umgesetzt wurde. Aber über die wirkliche Temperatur der Schicht bei der Beschießung kann das Thermoelement keine Auskunft geben. Mit einem gewöhnlichen, wenn auch dünndrähtigen Thermoelement die Temperatur einer Schicht auf einem dünnen Häutchen zu bestimmen, ist natürlich ganz ausgeschlossen. Die oben wiedergegebenen Überlegungen in bezug auf die Elektronenbeugungsversuche werden von diesen Bedenken nicht berührt, da es für diese Versuche gleichgültig ist, ob die Umwandlung der Schicht direkt durch Elektronenstoß oder auf einem Umweg über die Wärme erfolgt.

Der Einfluß eines Magnetfeldes auf die Umwandlungstemperatur. Das gleichartige Verhalten der Metallatome im amorphen Metall und im gewöhnlichen Gas bei der Ionisierung durch Temperaturerhöhung und durch Elektronenstoß legt es nahe, die Gegenüberstellung noch weiter zu führen. Ein Gas mit extrem kleiner Ionisierungsenergie läßt Untersuchungen möglich erscheinen, die im Gas mit normaler Ionisierungsenergie undenkbar sind. Ein Magnetfeld zum Beispiel vermehrt oder vermindert die Energie der Elektronen der Atome im Gas, und diese Energieänderung äußert sich

[1]) Näheres hierüber in der Dissertation von Münif Çelebi, Ankara 1937.

in einer Aufspaltung der Spektrallinien beim Zeeman-Effekt. Dadurch wird natürlich auch die Ionisierungsspannung verändert, wenn es auch wegen der Kleinheit der Verschiebung nicht möglich ist, sie zu messen. Da aber diese Energieänderung unabhängig vom Zustand der Elektronen nur durch die Größe des Magnetfeldes bestimmt wird, bedeutet sie für das Atom im amorphen Metall bei der kleinen Ionisierungsenergie prozentual eine viel stärkere Veränderung als im Gas. Es erscheint daher nicht unmöglich, im Magnetfeld eine Verschiebung der Umwandlungstemperatur festzustellen. Eine Durchrechnung zeigt in der Tat, daß in experimentell herstellbaren Magnetfeldern eine Verschiebung der Umwandlungstemperatur zu erwarten ist, die deutlich wahrnehmbar sein muß. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Übertragung der Gesetze für das einzelne unbeeinflußte Atom im Gas auf das Atom im amorphen Metall zulässig ist. Umgekehrt würde die experimentelle Bestätigung der Verschiebung der Umwandlungstemperatur im Magnetfeld die Auffassung der amorphen Metallmodifikation als ein Gas mit kleiner Ionisierungsenergie rechtfertigen.

Für diese Messungen stand nur ein kleiner Elektromagnet zur Verfügung, der bei dem nötigen Polabstand im Dauerbetrieb nicht mehr als 8000 Gauß lieferte. Mit dieser kleinen Feldstärke konnte eine Verschiebung der Umwandlungstemperatur nicht direkt gemessen werden, da die Fehler bei der Bestimmung der Umwandlungstemperatur größer als die erwartete Verschiebung waren. Bei den erschwerten Messungen in dem kleinen Raum zwischen den Polen des Elektromagneten streuten die Werte um mehr als einen Grad. Auf folgende Weise gelang es aber doch, den Effekt ohne zu großen Aufwand, wenn auch nicht genau zu messen, so doch sicherzustellen.

Eine durch Zerstäubung hergestellte Antimonschicht wurde in gewöhnlicher Weise zwischen den Polen des *nicht* eingeschalteten Elektromagneten umgewandelt und dabei die Leitfähigkeit gemsseen. Eine genau gleiche, in ein und derselben Zerstäubung hergestellte zweite Schicht wurde dann in gleicher Weise in genau gleicher Zeit umgewandelt, aber der Magnet eingeschaltet, als die Umwandlung eben eingesetzt hatte, was an dem Ansteigen der Leitfähigkeit zu erkennen war. Wenn ein Einfluß des Magnetfeldes auf die Umwandlungstemperatur besteht, muß die Leitfähigkeitskurve vom Einschalten des Magneten an steiler verlaufen als ohne Magnetfeld. Wichtig ist dabei vor allem, daß die Umwandlung in genau gleicher Zeit erfolgt wie die Umwandlung ohne Magnetfeld, da die Steilheit der Leitfähigkeitskurve durch die Erwärmungsgeschwindigkeit beeinflußt wird. Beide Kurven wurden dann bis zu dem Punkt, in dem für die zweite Kurve

das Magnetfeld eingeschaltet wurde, zur Deckung gebracht. Fehler in der Bestimmung der Umwandlungstemperatur spielen also keine Rolle mehr. Dieses Verfahren hatte noch den zweiten Vorteil, daß der Magnet nur für kurze Zeit eingeschaltet werden mußte, so daß er stark überlastet werden konnte, er lieferte dann 15000 Gauß.

In der Fig. 1 ist für vier Schichten die Leitfähigkeit aufgetragen, von denen zwei teilweise im Magnetfeld umgewandelt sind: es gehören zu diesen Schichten die Kurven I und III. An den mit Pfeilen bezeichneten Stellen ist das Magnetfeld eingeschaltet worden. Die Kurven II und IV geben die Leitfähigkeit von Schichten wieder, die ohne Magnetfeld umgewandelt sind, und wie man sieht, lassen sich diese beiden sehr gut zur Deckung bringen.

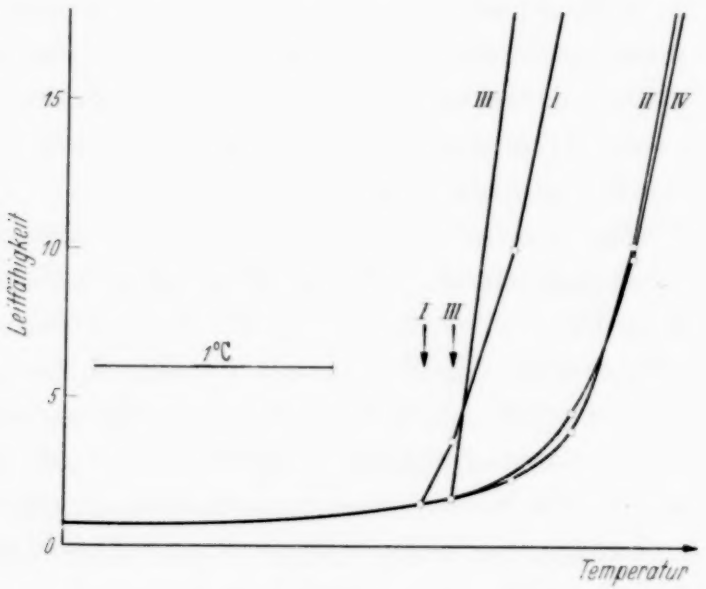


Fig. 1.

Alle vier Schichten wurden in 18 Minuten von Zimmertemperatur auf den Umwandlungspunkt erwärmt. Der Leitfähigkeitsanstieg ist für die im Magnetfeld umgewandelten Schichten wesentlich steiler. Die Verschiebung der Kurven gegenüber den ohne Magnetfeld gewonnenen beträgt im Mittel $0{,}58^0$ bei einer Feldstärke von etwa 15000 Gauß. Der wirkliche Einfluß eines solchen Magnetfeldes auf die Umwandlungstemperatur muß ein wenig größer sein, da das Magnetfeld nicht während der ganzen Umwandlung gewirkt hat. Wenn deswegen auf das quantitative Ergebnis dieses Versuches auch wenig Gewicht gelegt werden darf, so lohnt doch ein Vergleich mit der erwarteten Verschiebung, wenn man das Atom im amorphen Metall als Gasatom ansieht und den Effekt als Zeeman-Effekt auffaßt. Für 15000 Gauß würden die Elektronen nach der Formel für den normalen Zeeman-Effekt eine Energieänderung erfahren, die $0{,}67^0$ entsprechen

würde[1]). In Anbetracht der Tatsache, daß der experimentell gefundene Wert zu klein sein muß, ist die Übereinstimmung als unerwartet gut anzusehen. Es besteht also im äußerlich festen Gas der amorphen Metallmodifikation ein Zeeman-Effekt.

Der Einfluß eines elektrischen Feldes auf eine amorphe Schicht. Gegenüber einem Magnetfeld verhalten sich also die Atome einer amorphen Schicht genau so wie die Atome im Dampf. Diese Eigenschaft muß natürlich auch in einem elektrischen Feld bestehen, neben dem Zeeman-Effekt muß auch ein Stark-Effekt in der amorphen Metallmodifikation nachzuweisen sein. Auch in einem elektrostatischen Felde muß die Umwandlungstemperatur einer amorphen Metallschicht heruntergesetzt sein. Dem experimentellen Nachweis dieser Verschiebung dürften große Schwierigkeiten bei den Versuchen im Wege stehen. Aber es läßt sich in anderer Weise einfacher der Einfluß des elektrischen Feldes auf die Atome in der amorphen Metallmodifikation verfolgen. Es ist festgestellt[2]), daß in sehr hohen elektrischen Feldern die Spektrallinien verschwinden, ein Effekt, der durch die direkte Ionisierung der Atome durch das elektrische Feld verursacht wird. In der amorphen Metallmodifikation ist nun die Ionisierungsenergie gegenüber dem Atom im Dampf um einige Größenordnungen heruntergesetzt. Ganz entsprechend muß daher die Ionisierung der Atome im amorphen Metall schon bei sehr viel kleineren Feldstärken erfolgen, und diese Ionisierung läßt sich am einfachsten durch die dabei eintretende Leitfähigkeitsverbesserung nachweisen. In der Tat hat nun Perucca bei Schichten, von denen man annehmen muß, daß sie amorph sind[3]), eine starke Widerstandsabnahme gefunden, wenn die Schichten die Belegung eines geladenen Kondensators bildeten, und es trat diese Widerstandsabnahme bei beiden Vorzeichen auf[4]). Von Deaglio sind diese Messungen bestätigt worden[5]). Art des Auftretens dieses Effekts und Form der gefundenen Kurven sprechen eindeutig dafür, daß es sich bei dieser Widerstandsabnahme um den Stark-Effekt in der amorphen Metallmodifikation handelt. Besonders bemerkenswert ist, daß eine genügend hoch und lange erhitzte Schicht den Effekt nicht mehr zeigt, ebenso wie eine Schicht, die mit zu großer Stromstärke bei der Kathodenzerstäubung hergestellt ist, keine Widerstandsabnahme im elektrischen Feld zeigt, ganz in Übereinstimmung

[1]) Als Atomwärme ist die des Gases genommen. — [2]) H. Rausch v. Traubenberg u. R. Gebauer, Naturwissensch. **18**, 132, 417, 1930; ZS. f. Phys. **71**, 291, 1931. — [3]) Siehe die Arbeit (III). — [4]) E. Perucca, R. Accad. d. Scienze di Torino **69**, 166, 1934; Nuovo Cimento XIV, Nr. 10, 1937. — [5]) R. Deaglio, Nuovo Cimento XI, Nr. 5, 1934; Naturwissensch. **22**, 525, 1934.

stimmung mit den Erfahrungen an dünnen Metallschichten[1]), die durch Erhitzen nach der Herstellung oder durch zu große Stromstärke bei der Herstellung durch Kathodenzerstäubung ihren amorphen Aufbau einbüßen.

Bei zu dünnen Schichten ist bei einer bestimmten Feldstärke keine Widerstandsabnahme durch Ionisierung zu erwarten, da für solche Schichten die Ionisierungsenergie zu hoch ist. Bei zu dicken Schichten kann ebenfalls das elektrische Feld keine Widerstandsabnahme durch Ionisierung hervorrufen, da entweder die Umwandlungstemperatur die Herstellungstemperatur unterschritten hat, oder weil nur eine dünne Oberflächenschicht dem elektrischen Feld ausgesetzt ist. Zwischen beiden Schichtdicken muß eine günstigste Dicke bestehen, bei der die Widerstandsabnahme bei gegebenen Versuchs- und Herstellungsbedingungen ein Maximum zeigt. Sowohl die Kurven von Perucca als auch die von Deaglio zeigen einen Verlauf, der sich diesen Überlegungen anschließt: Bei zu dünnen und zu dicken Schichten setzt das elektrische Feld den Widerstand nicht herunter, zwischen beiden Dicken liegt ein deutlich ausgeprägtes Maximum, das um 10^{11} Ohm liegt. Auch die beobachtete Sättigung bei steigender Feldstärke ist verständlich, da die Widerstandsabnahme nicht weitergeführt werden kann, wenn alle vorher nicht ionisierten Atome, soweit sie vom elektrischen Feld erfaßt werden, ionisiert sind.

Auch bei den vorstehend erwähnten Untersuchungen fanden Apparate Verwendung, die seitens der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellt waren, wofür auch an dieser Stelle bestens gedankt sei.

Neuenkirchen (Oldenburg), im Oktober 1938.

---

[1]) Siehe die Arbeit (III).